

合肥市 2014 年高三第一次教学质量检测

数学试题(文)参考答案及评分标准

一、选择题:本大题共 10 小题,每小题 5 分,共 50 分,在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的.

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
答案	B	A	B	D	C	C	D	C	A	D

二、填空题:本大题共 5 小题,每小题 5 分,共 25 分.

11. (2, 3)
12. $(-\infty,0]$
13. $(2,\frac{4\sqrt{3}}{3})$
14. $[0, 1]$
15. ②④⑤

三、解答题:本大题共六个小题,共 75 分. 解答应写出文字说明、证明过程和演算步骤.

16. (12 分)【答案解析】(I)由已知得: $\cos(\theta-\frac{\pi}{4})=\frac{1}{3}, \sin(\theta-\frac{\pi}{4})=\frac{2\sqrt{2}}{3}$

$$\sin \theta = \sin[(\theta-\frac{\pi}{4})+\frac{\pi}{4}] = \sin(\theta-\frac{\pi}{4})\cos \frac{\pi}{4} + \cos(\theta-\frac{\pi}{4})\sin \frac{\pi}{4} = \frac{4+\sqrt{2}}{6}. \quad \cdots\cdots 6 \text{ 分}$$

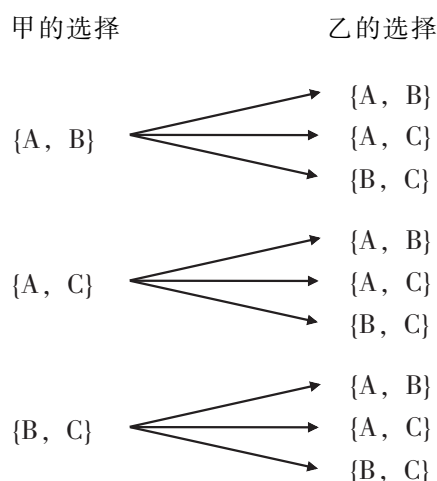
(II)由 $\cos(\theta-\frac{\pi}{4})=\frac{1}{3}$ 得 $\sin \theta + \cos \theta = \frac{\sqrt{2}}{3}$, 两边平方得: $1+2\sin \theta \cos \theta = \frac{2}{9}$

即 $\sin 2\theta = -\frac{7}{9}$, 而 $\cos 2\theta = 1-2\sin^2 \theta = -\frac{4\sqrt{2}}{9}$

$\therefore \tan 2\theta = \frac{7\sqrt{2}}{8}. \quad \cdots\cdots 12 \text{ 分}$

17. (12 分)【答案解析】(I)由茎叶图可得: $\overline{X_{\text{甲}}} = 87.5, \overline{X_{\text{乙}}} = 86.7, \overline{X_{\text{甲}}} > \overline{X_{\text{乙}}}$, 所以甲演唱水平更高一点, 但甲的方差较大, 即评委对甲的水平认可存在较大的差异. $\cdots\cdots 5 \text{ 分}$

(II)依题意, 共有 9 个基本事件:



其中,甲乙两选手选择的点评嘉宾恰重复一人包含 6 个基本事件.

所以,所求概率为 $P = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$12 分

18. (12 分)【答案解析】(Ⅰ)证明:取 AB 中点 H,连结 CH, $\because$ 底面 ABCD 是梯形,

且 $AD=DC=CB=\frac{1}{2}AB$,

易证四边形 AHCD 为菱形,

$\therefore AD=HC=\frac{1}{2}AB, \therefore \angle ACB = 90^\circ \therefore BC \perp AC$,3 分

$\because$ 平面 $ACEF \perp$ 平面 $ABCD$, 且平面 $ACEF \cap$ 平面 $ABCD = AC$,

$\therefore BC \perp$ 平面 $ACEF$, 而 $AF \subset$ 平面 $ACEF$, 故 $BC \perp AF$6 分

(Ⅱ) $DF \parallel$ 平面 BCE , 以下证明:

连 DH 交 AC 于 M, 易知 M 为 AC 中点, 连 FM. 在菱形 AHCD 中, $DM \perp AC$, 由第一问知 $BC \perp AC$, 故 $DM \parallel BC$8 分

在直角梯形 ACEF 中, $\underline{EF \parallel CM}$, 四边形 EFMC 是平行四边形, 故 $FM \parallel EC$.

.....10 分

而 $BC, CE \subset$ 平面 $BCE, BC \cap CE = C$, 而 $DM, MF \subset$ 平面 $DMF, DM \cap MF = M$, 故平面 $BCE \parallel$ 平面 $DMF, DF \subset$ 平面 DMF , 从而, $DF \parallel$ 平面 BCE12 分

19. (13 分)【答案解析】(Ⅰ) $a = 0$ 时, $f(x) = x^2 - 2 \ln x, x \in (0, +\infty)$

$$f'(x) = 2x - \frac{2}{x} = \frac{2(x+1)(x-1)}{x}, \text{ 令 } f'(x) = 0, \text{ 解得: } x = 1 \text{ (} x = -1 \text{ 舍去)}$$

当 $x \in (0, 1)$ 时, $f'(x) < 0$, $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上单调递减;

当 $x \in (1, +\infty)$ 时, $f'(x) > 0$, $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上单调递增。

$$\therefore f(x)_{\min} = f(1) = 1$$

所以, $\forall x \in (0, +\infty), f(x) \geq 1$5 分

(Ⅱ) $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$

$$f'(x) = \frac{2[(a+1)x^2 - ax - 1]}{x}$$

① 当 $a = -1$ 时, $f'(x) = \frac{2(x-1)}{x}$, 此时 $f(x)$ 在区间 $(1, +\infty)$ 上单调递增, 在 $(0, 1)$ 上单调递减;

② 当 $-2 < a < -1$ 时, $-1 < a+1 < 0, 1 < -\frac{1}{a+1}$.

$$\therefore f'(x) = \frac{2(x-1)(a+1)(x + \frac{1}{a+1})}{x}$$

$\therefore$ 解 $f'(x) < 0$ 得 $x \in (0, 1)$ 或 $x \in (-\frac{1}{a+1}, +\infty)$

解 $f'(x) > 0$ 得 $x \in (1, -\frac{1}{a+1})$

即 $f(x)$ 的单调增区间为 $(1, -\frac{1}{a+1})$, 单调减区间为 $(0, 1)$ 和 $(-\frac{1}{a+1}, +\infty)$

③ 当 $a = -2$ 时, 此时 $f'(x) = \frac{-2(x-1)^2}{x}, \therefore x \in (0, +\infty)$ 均有 $f'(x) \leq 0, f(x)$ 在区间 $(0, +\infty)$ 上单调递减, 无单调增区间.

综上, $a = -1$ 时, $f(x)$ 的单调递增区间为 $(1, +\infty)$, 单调递减区间为 $(0, 1)$;

$-2 < a < -1$ 时, $f(x)$ 的单调递增区间为 $(1, -\frac{1}{a+1})$, 单调递减区间为 $(0, 1)$ 和

$$(-\frac{1}{a+1}, +\infty);$$

$a = -2$ 时, $f(x)$ 的单调递减区间为 $(0, +\infty)$, 无单调增区间.13 分

20. (13 分) 【答案解析】(I) 因为抛物线的焦点 F 满足 $\overrightarrow{FA} + \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{FC} = \mathbf{0}$,

$$\therefore \overrightarrow{AF} = \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{FC},$$

取 BC 边上的中点 M , 则 $\overrightarrow{AF} = 2\overrightarrow{AM}$, 故点 F 在直线 l 上, 令 $y = 0$, 得 $x = 1$, 得抛物线

的焦点 $F(1, 0)$, 于是, $\frac{p}{2} = 1, p = 2$5 分

(II) 记 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), C(x_3, y_3)$, 由 $\overrightarrow{FA} + \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{FC} = \mathbf{0}$ 知:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 3, \quad \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$\text{且 } y_i^2 = 4x_i (i=1, 2, 3). \text{ 于是, } S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 = \frac{1}{4}(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2)$$

$$= (x_1 + x_2 + x_3) = 3$$

$\therefore S_1^2 + S_2^2 + S_3^2$ 为定值 3.13 分

21. (13 分) 【答案解析】(I) 对 $f(x) = x + \frac{1}{x}, (x > 0)$ 求导, 得 $f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$,

则切线 l_n 方程为: $y - (n + \frac{1}{n}) = (1 - \frac{1}{n^2})(x - n)$, 即 $y = (1 - \frac{1}{n^2})x + \frac{2}{n}$ 5 分

$$\text{易知 } A_n(n+1, n+1 + \frac{1}{n+1}), B_n(n+1, n+1 + \frac{n-1}{n^2})$$

$$\text{由 } a_n = |A_n B_n| \text{ 知 } a_n = \left| \frac{1}{n+1} - \frac{n-1}{n^2} \right| = \frac{1}{n^2(n+1)} \quad \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$(II) \because na_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

$$\therefore S_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1 - \frac{1}{n+1} < 1. \quad \dots\dots\dots 13 \text{ 分}$$