

衡水点睛大联考

第四次联考·数学试卷(理数)

命题:衡水点睛文化编辑部

本试卷分第Ⅰ卷(选择题)和第Ⅱ卷(非选择题)两部分,总分 150 分,考试时间 120 分钟。

第Ⅰ卷(选择题,共 60 分)

题号	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
答案												

一、选择题(本大题共 12 个小题,每小题 5 分,共 60 分。在每小题给出的四个选项中,只有一项是符合题目要求的。)

1. 设集合 $M = \{x | x^2 + 3x + 2 < 0\}$, 集合 $N = \{x | (\frac{1}{2})^x \leq 4\}$, 则 $M \cup N =$ ()

A. $\{x | x \geq -2\}$ B. $\{x | x > -1\}$ C. $\{x | x < -1\}$ D. $\{x | x \leq -2\}$

2. 若 $x \in (e^{-1}, 1)$, $a = \ln x$, $b = 2\ln x$, $c = \ln^3 x$, 则 ()

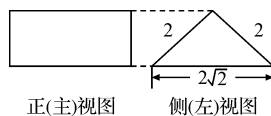
A. $a < b < c$ B. $c < a < b$ C. $b < a < c$ D. $b < c < a$

3. 抛物线 $y = 4x^2$ 关于直线 $x - y = 0$ 对称的抛物线的准线方程是 ()

A. $y = -1$ B. $y = -\frac{1}{16}$ C. $x = -1$ D. $x = -\frac{1}{16}$

4. 右图是一个几何体的正(主)视图和侧(左)视图,其俯视图是面积为 $8\sqrt{2}$ 的矩形,则该几何体的表面积是 ()

A. $20 + 8\sqrt{2}$ B. $24 + 8\sqrt{2}$ C. 8 D. 16



5. 若函数 $f(x)$ 同时具有以下两个性质:① $f(x)$ 是偶函数;② 对任意实数 x , 都有 $f(\frac{\pi}{4} + x) =$

$f(\frac{\pi}{4} - x)$ 。则 $f(x)$ 的解析式可以是 ()

A. $f(x) = \cos x$ B. $f(x) = \cos(2x + \frac{\pi}{2})$

C. $f(x) = \sin(4x + \frac{\pi}{2})$ D. $f(x) = \cos 6x$

6. 已知命题 $p: \exists x_0 \in R, e^{x_0} - mx = 0$, $q: \forall x \in R, x^2 + mx + 1 \geq 0$, 若 $p \vee (\neg q)$ 为假命题, 则实数 m 的取值范围是 ()

A. $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$ B. $[0, 2]$

C. R D. $\emptyset$

7. 若实数 x, y 满足不等式组 $\begin{cases} y \leq 5 \\ 2x - y + 3 \leq 0 \\ x + y - 1 \geq 0 \end{cases}$, 则 $z = |x| + 2y$ 的最大值是 ()

A. 10

B. 11

C. 13

D. 14

8. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = 1$, 且 $a_n = \frac{1}{3}a_{n-1} + (\frac{1}{3})^n (n \geq 2, \text{ 且 } n \in \mathbb{N}^*)$, 则数列 $\{a_n\}$ 的通项公式为 ()

A. $a_n = \frac{3^n}{n+2}$

B. $a_n = \frac{n+2}{3^n}$

C. $a_n = n+2$

D. $a_n = (n+2) \cdot 3^n$

9. 已知 F_1, F_2 为双曲线 $C: x^2 - y^2 = 1$ 的左、右焦点, 点 P 在 C 上, $|PF_1| = 2|PF_2|$, 则 $\cos \angle F_1PF_2 =$ ()

A. $\frac{1}{4}$

B. $\frac{3}{4}$

C. $\frac{3}{5}$

D. $\frac{4}{5}$

10. $(x^2 + 2)(\frac{1}{x^2} - mx)^5$ 展开式中 x^2 项的系数 250, 则实数 m 的值为 ()

A. ± 5

B. 5

C. $\pm \sqrt{5}$

D. $\sqrt{5}$

11. 与向量 $a = (\frac{7}{2}, \frac{1}{2})$, $b = (\frac{1}{2}, -\frac{7}{2})$ 的夹角相等, 且模为 1 的向量是 ()

A. $(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5})$

B. $(\frac{4}{5}, -\frac{3}{5})$ 或 $(-\frac{4}{5}, \frac{3}{5})$

C. $(\frac{2\sqrt{2}}{3}, -\frac{1}{3})$

D. $(\frac{2\sqrt{2}}{3}, -\frac{1}{3})$ 或 $(-\frac{2\sqrt{2}}{3}, \frac{1}{3})$

12. 在平面直角坐标系 xOy 中, 圆 C 的方程为 $x^2 + y^2 - 8x + 15 = 0$, 若直线 $y = kx + 2$ 上至少存在一点, 使得以该点为圆心, 半径为 1 的圆与圆 C 有公共点, 则 k 的最小值是 ()

A. $-\frac{4}{3}$

B. $-\frac{5}{4}$

C. $-\frac{3}{5}$

D. $-\frac{5}{3}$

第 II 卷(非选择题, 共 90 分)

二、填空题(本大题共 4 个小题, 每小题 5 分, 共 20 分, 请把正确的答案填写在各小题的横线上。)

13. 已知底面边长为 $\sqrt{2}$, 各侧面均为直角三角形的正三棱锥 $P-ABC$ 的四个顶点都在同一球面上, 则此球的表面积为_____。

14. 某宾馆安排 A, B, C, D, E 五人入住 3 个房间, 每个房间至少住 1 人, 且 A, B 不能住同一房间, 则共有_____种不同的安排方法(用数字作答)。

15. 若在区间 $[0, 1]$ 上存在实数 x 使 $2^x(3x + a) < 1$ 成立, 则 a 的取值范围是_____。

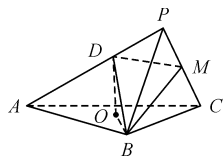
16. 已知中心在原点的椭圆与双曲线有公共焦点, 且左、右焦点分别为 F_1, F_2 , 这两条曲线在第一象限的交点为 P , $\triangle PF_1F_2$ 是以 PF_1 为底边的等腰三角形。若 $|PF_1| = 10$, 椭圆与双曲线的离心率分别为 e_1, e_2 , 则 $e_1 \cdot e_2$ 的取值范围为_____。

三、解答题(本大题共 6 个小题,共 70 分,解答应写出文字说明、证明或演算步骤。)

17. (12 分)在 $\triangle ABC$ 中,角 A 、 B 、 C 所对的边分别为 a 、 b 、 c ,函数 $f(x)=2\cos x\sin(x-A)+\sin A(x\in R)$ 在 $x=\frac{5\pi}{12}$ 处取得最大值。
- (1) 当 $x\in(0,\frac{\pi}{2})$ 时,求函数 $f(x)$ 的值域;
- (2) 若 $a=7$ 且 $\sin B+\sin C=\frac{13\sqrt{3}}{14}$,求 $\triangle ABC$ 的面积。

18. (12 分)若 $\{a_n\}$ 是各项均不为零的等差数列,公差为 d , S_n 为其前 n 项和,且满足 $a_n^2=S_{2n-1}$, $n\in N^*$ 。数列 $\{b_n\}$ 满足 $b_n=\frac{1}{a_n\cdot a_{n+1}}$, T_n 为数列 $\{b_n\}$ 的前 n 项和。
- (I) 求 a_n 和 T_n ;
- (II) 是否存在正整数 m 、 n ($1<m<n$),使得 T_1 、 T_m 、 T_n 成等比数列? 若存在,求出所有 m 、 n 的值;若不存在,请说明理由。

19. (12 分) 三棱锥 $P-ABC$ 中, 底面 ABC 为边长为 $2\sqrt{3}$ 的正三角形, 平面 $PBC \perp$ 平面 ABC , $PB=PC=2$, D 为 AP 上一点, $AD=2DP$, O 为底面三角形中心。



(I) 求证: $BD \perp AC$;

(II) 设 M 为 PC 中点, 求二面角 $M-BD-O$ 的余弦值。

20. (12 分) 已知点 $A(-4,4)$ 、 $B(4,4)$, 直线 AM 与 BM 相交于点 M , 且直线 AM 的斜率与直线 BM 的斜率之差为 -2 , 点 M 的轨迹为曲线 C 。

(I) 求曲线 C 的轨迹方程;

(II) Q 为直线 $y=-1$ 上的动点, 过 Q 做曲线 C 的切线, 切点分别为 D 、 E , 求 $\triangle QDE$ 的面积 S 的最小值。

21. (12 分) 已知函数 $f(x) = \frac{1}{2}[t \ln(x+2) - \ln(x-2)]$, 且 $f(x) \geq f(4)$ 恒成立。

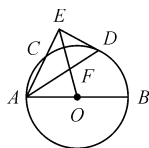
(I) 求 x 为何值时, $f(x)$ 在 $[3, 7]$ 上取得最大值;

(II) 设 $F(x) = a \ln(x-1) - f(x)$, 若 $F(x)$ 是单调递增函数, 求 a 的取值范围。

请考生在第 22~24 三题中任选一题做答,如果多做,则按所做的第一题记分。

22. (10 分)【选修 4-1: 几何证明选讲】

如右图, AB 是 $\odot O$ 的直径, AC 是弦, $\angle BAC$ 的平分线 AD 交 $\odot O$ 于点 D , $DE \perp AC$, 交 AC 的延长线于点 E , OE 交 AD 于点 F 。



(I) 求证: DE 是 $\odot O$ 的切线;

(II) 若 $\frac{AC}{AB} = \frac{2}{5}$, 求 $\frac{AF}{DF}$ 的值。

23. (10 分)【选修 4-4: 坐标系与参数方程】

已知在平面直角坐标系 xOy 中, 直线 l 的参数方程是
$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}}{2}t \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}t + 4\sqrt{2} \end{cases} \quad (t \text{ 是参数}),$$
 以原

点 O 为极点, Ox 为极轴建立极坐标系, 圆 C 的极坐标方程为 $\rho = 2\cos(\theta + \frac{\pi}{4})$ 。

(1) 求圆心 C 的直角坐标;

(2) 由直线 l 上的点向圆 C 引切线, 求切线长的最小值。

24. (10 分)【选修 4-5: 不等式选讲】

已知 $f(x) = |2x - 1| + ax - 5$ (a 是常数, $a \in R$)。

(I) 当 $a = 1$ 时求不等式 $f(x) \geq 0$ 的解集;

(II) 如果函数 $y = f(x)$ 恰有两个不同的零点, 求 a 的取值范围。

数学(理科)选做 _____ 题:

衡水点睛大联考

数学·参考答案(四)

(理科)

1. A 【解析】 $M = \{x | -2 < x < -1\}$, $N = \{x | x \geq -2\}$, $\therefore M \cup N = \{x | x \geq -2\}$ 。

2. C 【解析】 $\because -\frac{1}{e} < x < 1$, $\therefore -1 < a = \ln x < 0$. $2\ln x < \ln x$, 即 $b < a$, 又 $a - c = \ln x - \ln^3 x = \ln x(1 - \ln x)(1 + \ln x) < 0$, 则 $a < c$, 因此 $b < a < c$ 。

3. D 【解析】抛物线 $x^2 = \frac{1}{4}y$, 准线 $y = -\frac{1}{16}$, 关于 $x = y$ 对称的直线 $x = -\frac{1}{16}$ 为所求。

4. A 【解析】由已知俯视图是矩形, 则该几何体为一个三棱柱, 根据三视图的性质, 俯视图的矩形宽为 $2\sqrt{2}$, 由面积 $8\sqrt{2}$ 得长为 4, 则 $S = S_{\text{侧}} + 2S_{\text{底}} = (8\sqrt{2} + 2 \times 2 \times 4) + 2 \times \frac{1}{2} \times 2\sqrt{2} \times \sqrt{2} = 20 + 8\sqrt{2}$ 。

5. C 【解析】 $\because f(x)$ 为偶函数, 而 B 为 $f(x) = -\sin 2x$ 为奇函数, 所以排除 B, 由 $f(\frac{\pi}{4} + x) = f(\frac{\pi}{4} - x)$ 知, $f(x)$ 的对称轴为 $x = \frac{\pi}{4}$, 而 $x = \frac{\pi}{4}$ 是 $f(x) = \sin(4x + \frac{\pi}{2}) = \cos 4x$ 的对称轴, 且为偶函数。

6. B 【解析】若命题 p 为真, 则 $m = \frac{e^x}{x}$, 令 $y = \frac{e^x}{x}$, 则 $y' = \frac{e^x(x-1)}{x^2}$, $y = \frac{e^x}{x}$ 在 $(-\infty, 0)$ 上减函数, 在 $(0, 1)$ 上为减函数, 在 $(1, +\infty)$ 为增函数, $\therefore m \in (-\infty, 0) \cup [e, +\infty)$; 若 q 为真, 则 $\Delta = m^2 - 4 \leq 0$, 即 $-2 \leq m \leq 2$; 则 $\neg q$ 为 $m \in (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$ 。若 $p \vee \neg q$ 为真, 则 $m \in (-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$; 若 $p \vee \neg q$ 为假, 则 $m \in [0, 2]$ 。

7. D 【解析】当 $x \geq 0$ 时, $2y = -x + z$ 表示的是斜率为 -1 截距为 z 的平行直线系, 当过点 $(1, 5)$ 时, 截距最大, 此时 z 最大, $z_{\max} = 1 + 2 \cdot 5 = 11$; 当 $x < 0$ 时, $2y = x + z$, 表示的是斜率为 -1 截距为 z 的平行直线系, 当过点 $(-4, 5)$ 时, $z_{\max} = 4 + 2 \cdot 5 = 14$ 。

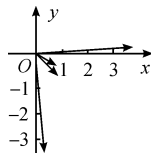
8. B 【解析】由 $a_n = \frac{1}{3}a_{n-1} + (\frac{1}{3})^n$ ($n \geq 2, n \in N$), 两边乘以 3^n 得 $3^n a_n = 3^{n-1} a_{n-1} + 1$ 。数列 $\{3^n a_n\}$ 是以 3 为首项, 公差为 1 的等差数列, $3^n a_n = 3 + (n-1) \times 1 = n+2$ 。所以 $a_n = \frac{n+2}{3^n}$ 。

9. B 【解析】由双曲线的定义知: $|PF_1| - |PF_2| = 2a = 2$, 又 $|PF_1| = 2|PF_2|$, 所以 $|PF_1| = 4$, $|PF_2| = 2$; 又 $|F_1 F_2| = 2c = 2\sqrt{2}$, 所以 $\cos \angle F_1 P F_2 = \frac{|PF_1|^2 + |PF_2|^2 - |F_1 F_2|^2}{2|PF_1| \cdot |PF_2|} = \frac{3}{4}$ 。

10. C 【解析】若第一个因式取 2, 第二个因式中项 x^2 为: $2C_5^r x^{-2(5-r)} (-mx)^r = 2C_5^r (-m)^r x^{3r-10}$, 由 $3r-10=2$ 得 $r=4$, 系数为 $C_5^4 = (-m)^4 = 5m^4$, 因第二个因式中没有常数项, 所以展开式 x^2 项的系数是 $2 \times 5m^4 = 250$, $\therefore m = \pm\sqrt{5}$ 。

11. B 【解析】方法一:(直接法) 设所求向量 $e = (\cos\theta, \sin\theta)$, 则由于该向量与 a, b 的夹角都相等, 故

$$\frac{a \cdot e}{|a||e|} = \frac{b \cdot e}{|b||e|} \Rightarrow a \cdot e = b \cdot e \Rightarrow \frac{7}{2} \cos\theta + \frac{1}{2} \sin\theta = \frac{1}{2} \cos\theta - \frac{7}{2} \sin\theta \Rightarrow 3\cos\theta = -4\sin\theta, \text{ 所以}$$
$$\begin{cases} \sin\theta = -\frac{3}{5} \\ \cos\theta = \frac{4}{5} \end{cases}, \text{ 或 } \begin{cases} \sin\theta = \frac{3}{5} \\ \cos\theta = -\frac{4}{5} \end{cases}, \text{ 可知 B 选项成立; 方法二:(数形结合法) 画出 } a, b \text{ 的草图, 然后画}$$



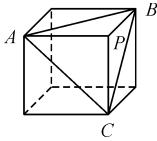
出 $(\frac{2}{3}\sqrt{2}, -\frac{1}{3})$, 显然它与 a, b 的夹角不相等, 逐一排除; 方法三:(定性判断、验证法) 若存在一向量 c 与 a, b 的夹角相等, 则 $-c$ 与 a, b 的夹角也一定相等, 故应有 2 个向量, 排除 A、C, $\because |a| = |b|$, $\therefore$ 若 c 与 a, b 的夹角相等, 由向量的夹角公式可得 $a \cdot c = b \cdot c$, 显然 $(\frac{7}{2}, \frac{1}{2}) \cdot (\frac{2}{3}\sqrt{2}, -\frac{1}{3}) \neq (\frac{1}{2}, -\frac{7}{2}) \cdot (\frac{2}{3}\sqrt{2}, -\frac{1}{3})$, 排除 D。

12. A 【解析】因为圆 C 的方程可化为: $(x-4)^2 + y^2 = 1$, 所以圆 C 的圆心为 $(4, 0)$, 半径为 1。因为由题意, 直线

$y=kx+2$ 上至少存在一点 $A(x_0, kx_0+2)$, 以该点为圆心, 1 为半径的圆与圆 C 有公共点, 所以存在 $x_0 \in R$, 使得 $AC \leq 1+1$ 成立, 即 $AC_{\min} \leq 2$; 因为 $AC_{\min}$ 即为点 C 到直线 $y=kx+2$ 的距离 $\frac{|4k+2|}{\sqrt{k^2+1}}$, 所以 $\frac{|4k+2|}{\sqrt{k^2+1}} \leq 2$,

解得 $-\frac{4}{3} \leq k \leq 0$, 所以 k 的最小值是 $-\frac{4}{3}$.

13. 3π 【解析】将三棱锥补形为正方体, 如右图所示, 则三棱锥 $P-ABC$ 的外接球即为正方体的外接球, $\triangle ABC$ 的边长为 $\sqrt{2}$, 由正方体的性质可知正方体的棱长均为 1, 则正方体的体对角线长为 $\sqrt{3}$, 外接球的半径为 $\frac{\sqrt{3}}{2}$, 外接球的表面积为 $4\pi \times (\frac{\sqrt{3}}{2})^2 = 3\pi$.



14. 114 【解析】 $C_5^3 \cdot A_3^3 + C_3^1 \cdot C_5^2 \cdot C_3^2 - C_4^1 \cdot A_3^3 = 114$.

15. $a < 1$ 【解析】由 $2^x(3x+a) < 1$ 得 $a < \frac{1-2^x \times 3x}{2^x} = 2^{-x} - 3x$, 在区间 $[0, 1]$ 存在实数 x 使得 $a < 2^{-x} - 3x$ 即只要满足 $(2^{-x} - 3x)_{\max} > a$ 即可, 而 $2^{-x} - 3x$ 在区间 $[0, 1]$ 上为减函数, 所以 $(2^{-x} - 3x)_{\max} = 1$, 所以 $a < 1$.

16. $(\frac{1}{3}, +\infty)$ 【解析】设椭圆与双曲线的半焦距为 c , $|PF_1| = r_1$, $|PF_2| = r_2$, 由题意知 $r_1 = 10$, $r_2 = 2c$, 且 $r_1 > r_2$, $\therefore 2c < 10$, 由三角形两边之和大于第三边可知 $2r_2 > r_1$, 即 $2c + 2c > 10$, 于是 $\frac{5}{2} < c < 5$, $\therefore 1 < \frac{25}{c^2} < 4$; 又 $e_1 = \frac{2c}{2a} = \frac{2c}{r_1 + r_2} = \frac{c}{5+c}$, $e_2 = \frac{2c}{2a} = \frac{2c}{r_1 - r_2} = \frac{c}{5-c}$, $\therefore e_1 \cdot e_2 = \frac{c^2}{25 - c^2} = \frac{1}{\frac{25}{c^2} - 1} > \frac{1}{3}$.

17. 解: (1) $f(x) = 2\cos x(\sin x \cos A - \cos x \sin A) + \sin A = 2\sin x \cos x \cos A - 2\cos^2 x \sin A + \sin A$
 $= \sin 2x \cos A - \cos 2x \sin A = \sin(2x - A)$ 2 分
 $\therefore f(x)$ 在 $x = \frac{5}{12}\pi$ 处取得最大值
 $\therefore 2 \times \frac{5}{12}\pi - A = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$, 其中 $k \in Z$, 即 $A = \frac{\pi}{3} - 2k\pi$, 其中 $k \in Z$
 $\therefore A \in (0, \pi)$, $\therefore A = \frac{\pi}{3}$ 4 分
 $\therefore x \in (0, \frac{\pi}{2})$, $\therefore 2x - A \in (-\frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3})$
 $\therefore -\frac{\sqrt{3}}{2} < \sin(2x - A) \leq 1$, 即 $f(x)$ 的值域为 $(-\frac{\sqrt{3}}{2}, 1]$ 6 分

(2) 由正弦定理 $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C}$ 得, $\sin B + \sin C = \frac{b+c}{a} \sin A$
 即 $\frac{13}{14}\sqrt{3} = \frac{b+c}{7} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$, $\therefore b+c = 13$ 8 分
 由余弦定得 $a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$ 得
 $a^2 = (b+c)^2 - 2bc - 2bc \cos A$, 即 $49 = 169 - 3bc$, $\therefore bc = 40$ 10 分
 $\therefore S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} bc \sin A = \frac{1}{2} \times 40 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 10\sqrt{3}$ 12 分

18. 解: (I) $a_n^2 = S_{2n-1}$ 中, 令 $n=1, 2$, 解得 $a_1=1, d=2$ 2 分
 从而 $a_n = 2n-1, b_n = \frac{1}{2}(\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1})$
 于是 $T_n = \frac{1}{2}[(1 - \frac{1}{3}) + (\frac{1}{3} - \frac{1}{5}) + \dots + (\frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n+1})] = \frac{n}{2n+1}$ 6 分
 (II) 假设否存在正整数 $m, n(1 < m < n)$, 使得 T_1, T_m, T_n 成等比数列
 则 $(\frac{m}{2m+1})^2 = \frac{1}{3} \cdot \frac{n}{2n+1}$, 可得 $\frac{3}{n} = \frac{-2m^2 + 4m + 1}{m^2} > 0$ 8 分
 由分子为正, 解得 $1 - \frac{\sqrt{6}}{2} < m < 1 + \frac{\sqrt{6}}{2}$ 10 分
 由 $m \in N^*, m > 1$, 得 $m=2$, 此时 $n=12$
 当且仅当 $m=2, n=12$ 时, T_1, T_m, T_n 成等比数列 12 分

19. (I) 连结 AO 并延长交 BC 于点 E , 连结 PE

