【说明】：【参考版答案】非官方版正式答案，答案和解析有可能存在少量错误，仅供参考使用。

2016年普通高等学校招生全国统一考试（江苏卷）

数学Ⅰ

参考公式：

样本数据 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的方差 $s^2=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\bar{x}\right)^2$，其中 $\bar{x}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$.

棱柱的体积 $V=Sh$，其中 S 是棱柱的底面积，h 是高.

棱锥的体积 $V=\frac{1}{3}Sh$，其中 S 是棱锥的底面积，h 为高.

一、填空题：本大题共14小题，每小题5分，共计70分．请把答案填写在答题卡相应位置上.

1. 已知集合 $A=\{-1,2,3,6\}$，$B=\{x\,|\,-2<x<3\}$，则 $A\cap B=$____________.

【答案】$\{-1,2\}$；

【解析】由交集的定义可得 $A\cap B=\{-1,2\}$.

2. 复数 $z=(1+2\mathrm{i})(3-\mathrm{i})$，其中 i 为虚数单位，则 z 的实部是____________.

【答案】5；

【解析】由复数乘法可得 $z=5+5\mathrm{i}$，则则 z 的实部是 5.

3. 在平面直角坐标系 xOy 中，双曲线 $\frac{x^2}{7}-\frac{y^2}{3}=1$ 的焦距是____________.

【答案】$2\sqrt{10}$；

【解析】$c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{10}$，因此焦距为 $2c=2\sqrt{10}$.

4. 已知一组数据 4.7，4.8，5.1，5.4，5.5，则该组数据的方差是____________.

【答案】0.1；

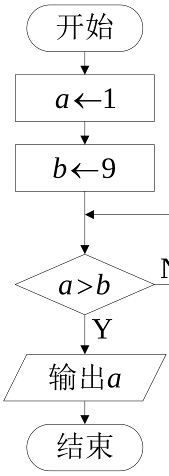
【解析】$\bar{x}=5.1$，$s^2=\frac{1}{5}\left(0.4^2+0.3^2+0^2+0.3^2+0.4^2\right)=0.1$.

5. 函数 $y=\sqrt{3-2x-x^2}$ 的定义域是____________.

【答案】$[-3,1]$；

【解析】$3-2x-x^2\geqslant 0$，解得 $-3\leqslant x\leqslant 1$，因此定义域为 $[-3,1]$.

6. 如图是一个算法的流程图，则输出 a 的值是____________.



【答案】9;

【解析】a,b 的变化如下表：

a	1	5	9
b	9	7	5

则输出时 $a=9$.

7. 将一个质地均匀的骰子（一种各个面上分别标有$1,2,3,4,5,6$个点为正方体玩具）先后抛掷 2 次，则出现向上的点数之和小于 10 的概率是____________.

【答案】$\frac{5}{6}$;

【解析】将先后两次点数记为 (x,y)，则共有 $6\times6=36$ 个等可能基本事件，其中点数之和大于等于 10 有

$(4,6),(5,5),(5,6),(6,4),(6,5),(6,6)$ 六种，则点数之和小于 10 共有 30 种，概率为 $\frac{30}{36}=\frac{5}{6}$.

8. 已知 $\{a_n\}$ 是等差数列，S_n 是其前 n 项和．若 $a_1+a_2^2=-3$，$S_5=10$，则 a_9 的值是____________.

【答案】20;

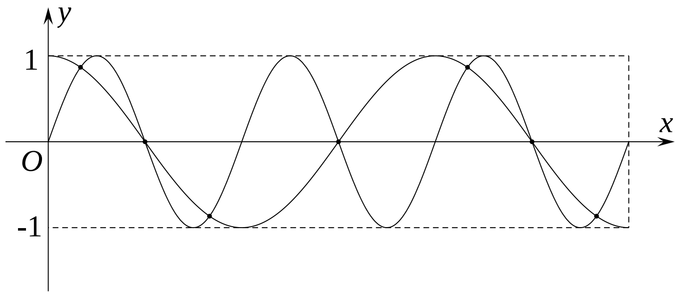
【解析】设公差为 d，则由题意可得 $a_1+(a_1+d)^2=-3$，$5a_1+10d=10$，

解得 $a_1=-4$，$d=3$，则 $a_9=-4+8\times3=20$.

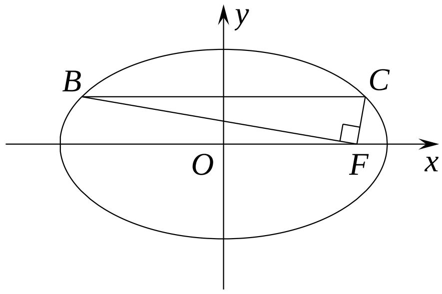
9. 定义在区间 $[0,3\pi]$ 上的函数 $y=\sin 2x$ 的图象与 $y=\cos x$ 的图象的交点个数是____________.

【答案】7;

【解析】画出函数图象草图，共 7 个交点.



10. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中，F 是椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\left(a>b>0\right)$ 的右焦点，直线 $y=\frac{b}{2}$ 与椭圆交于 B,C 两点，且 $\angle BFC=90°$，则该椭圆的离心率是____________.



【答案】$\frac{\sqrt{6}}{3}$；

【解析】由题意得 $F\left(c,0\right)$，直线 $y=\frac{b}{2}$ 与椭圆方程联立可得 $B\left(-\frac{\sqrt{3}a}{2},\frac{b}{2}\right)$，$C\left(\frac{\sqrt{3}a}{2},\frac{b}{2}\right)$，

由 $\angle BFC=90°$ 可得 $\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{CF}=0$，$\overrightarrow{BF}=\left(c+\frac{\sqrt{3}a}{2},-\frac{b}{2}\right)$，$\overrightarrow{CF}=\left(c-\frac{\sqrt{3}a}{2},-\frac{b}{2}\right)$，

则 $c^2-\frac{3}{4}a^2+\frac{1}{4}b^2=0$，由 $b^2=a^2-c^2$ 可得 $\frac{3}{4}c^2=\frac{1}{2}a^2$，则 $e=\frac{c}{a}=\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$.

11. 设 $f\left(x\right)$ 是定义在 $\mathbf{R}$ 上且周期为 2 的函数，在区间 $\left[-1,1\right)$ 上 $f\left(x\right)=\begin{cases}x+a, & -1\le x<0,\\ \left|\frac{2}{5}-x\right|, & 0\le x<1,\end{cases}$

其中 $a\in\mathbf{R}$，若 $f\left(-\frac{5}{2}\right)=f\left(\frac{9}{2}\right)$，则 $f\left(5a\right)$ 的值是____________.

【答案】$-\frac{2}{5}$；

【解析】由题意得 $f\left(-\frac{5}{2}\right)=f\left(-\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{2}+a$，$f\left(\frac{9}{2}\right)=f\left(\frac{1}{2}\right)=\left|\frac{2}{5}-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{10}$，

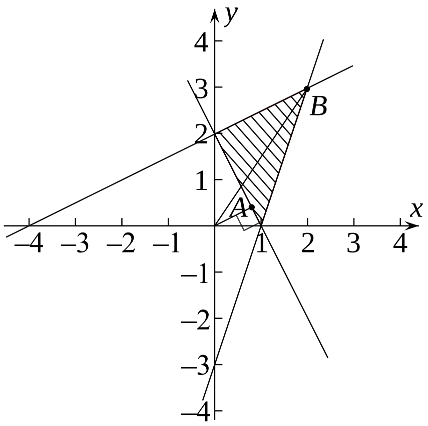
由 $f\left(-\frac{5}{2}\right)=f\left(\frac{9}{2}\right)$ 可得 $-\frac{1}{2}+a=\frac{1}{10}$，则 $a=\frac{3}{5}$，

则 $f\left(5a\right)=f\left(3\right)=f\left(-1\right)=-1+a=-1+\frac{3}{5}=-\frac{2}{5}$.

12. 已知实数 x,y 满足 $\begin{cases} x-2y+4\ge 0, \\ 2x+y-2\ge 0, \\ 3x-y-3\le 0, \end{cases}$ 则 x^2+y^2 的取值范围是____________.

【答案】$\left[\frac{4}{5},13\right]$；

【解析】在平面直角坐标系中画出可行域如下



x^2+y^2 为可行域内的点到原点距离的平方.

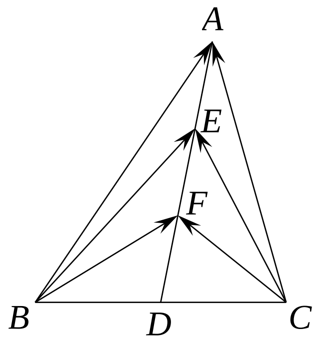
可以看出图中 A 点距离原点最近，此时距离为原点 A 到直线 $2x+y-2=0$ 的距离，

$d=\frac{|-2|}{\sqrt{4+1}}=\frac{2\sqrt{5}}{5}$，则 $\left(x^2+y^2\right)_{\min}=\frac{4}{5}$，

图中 B 点距离原点最远，B 点为 $x-2y+4=0$ 与 $3x-y-3=0$ 交点，则 $B(2,3)$，

则 $\left(x^2+y^2\right)_{\max}=13$.

13. 如图，在 $\triangle ABC$ 中，D 是 BC 的中点，E,F 是 AD 上两个三等分点，$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CA}=4$，$\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{CF}=-1$，则 $\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{CE}$ 的值是____________.



【答案】$\frac{7}{8}$；

【解析】令 $\overrightarrow{DF}=\vec{a}$，$\overrightarrow{DB}=\vec{b}$，则 $\overrightarrow{DC}=-\vec{b}$，$\overrightarrow{DE}=2\vec{a}$，$\overrightarrow{DA}=3\vec{a}$，

则 $\overrightarrow{BA}=3\vec{a}-\vec{b}$，$\overrightarrow{CA}=3\vec{a}+\vec{b}$，$\overrightarrow{BE}=2\vec{a}-\vec{b}$，$\overrightarrow{CE}=2\vec{a}+\vec{b}$，$\overrightarrow{BF}=\vec{a}-\vec{b}$，$\overrightarrow{CF}=\vec{a}+\vec{b}$，

则 $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CA}=9\vec{a}^2-\vec{b}^2$，$\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{CF}=\vec{a}^2-\vec{b}^2$，$\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{CE}=4\vec{a}^2-\vec{b}^2$，

由 $\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{CA}=4$，$\overrightarrow{BF}\cdot\overrightarrow{CF}=-1$ 可得 $9\vec{a}^2-\vec{b}^2=4$，$\vec{a}^2-\vec{b}^2=-1$，因此 $\vec{a}^2=\frac{5}{8},\vec{b}^2=\frac{13}{8}$，

因此 $\overrightarrow{BE}\cdot\overrightarrow{CE}=4\vec{a}^2-\vec{b}^2=\frac{4\times5}{8}-\frac{13}{8}=\frac{7}{8}$.

14. 在锐角三角形 ABC 中，$\sin A=2\sin B\sin C$，则 $\tan A\tan B\tan C$ 的最小值是____________.

【答案】8；

【解析】由 $\sin A=\sin\left(\pi-A\right)=\sin\left(B+C\right)=\sin B\cos C+\cos B\sin C$，$\sin A=2\sin B\sin C$，

可得 $\sin B\cos C+\cos B\sin C=2\sin B\sin C$（*），

由三角形 ABC 为锐角三角形，则 $\cos B>0,\cos C>0$，

在（*）式两侧同时除以 $\cos B\cos C$ 可得 $\tan B+\tan C=2\tan B\tan C$，

又 $\tan A=-\tan\left(\pi-A\right)=-\tan\left(B+C\right)=-\frac{\tan B+\tan C}{1-\tan B\tan C}$ (#),

则 $\tan A\tan B\tan C=-\frac{\tan B+\tan C}{1-\tan B\tan C}\times\tan B\tan C$，

由 $\tan B+\tan C=2\tan B\tan C$ 可得 $\tan A\tan B\tan C=-\frac{2\left(\tan B\tan C\right)^2}{1-\tan B\tan C}$，

令 $\tan B\tan C=t$，由 A,B,C 为锐角可得 $\tan A>0,\tan B>0,\tan C>0$，

由(#)得 $1-\tan B\tan C<0$，解得 $t>1$

$\tan A\tan B\tan C=-\frac{2t^2}{1-t}=-\frac{2}{\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t}}$，

$\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t}=\left(\frac{1}{t}-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$，由 $t>1$ 则 $0>\frac{1}{t^2}-\frac{1}{t}\geq-\frac{1}{4}$，因此 $\tan A\tan B\tan C$ 最小值为 8，

当且仅当 $t=2$ 时取到等号，此时 $\tan B+\tan C=4$，$\tan B\tan C=2$，

解得 $\tan B=2+\sqrt{2},\tan C=2-\sqrt{2},\tan A=4$（或 $\tan B,\tan C$ 互换），此时 A,B,C 均为锐角.

二、解答题：本大题共 6 小题，共计 90 分．请在答题卡指定区域内作答，解答时应写出文字说明，证明过程或演算步骤.

15. （本小题满分 14 分）

在 $\triangle ABC$ 中，$AC=6$，$\cos B=\frac{4}{5}$，$C=\frac{\pi}{4}$.

⑴ 求 AB 的长；

⑵ 求 $\cos\left(A-\frac{\pi}{6}\right)$ 的值.

【答案】⑴ $5\sqrt{2}$；⑵ $\frac{7\sqrt{2}-\sqrt{6}}{20}$.

【解析】⑴ $\because\cos B=\frac{4}{5}$，$B$ 为三角形的内角

$\therefore \sin B=\dfrac{3}{5}$

$\because \dfrac{AB}{\sin C}=\dfrac{AC}{\sin B}$

$\therefore \dfrac{AB}{\frac{\sqrt{2}}{2}}=\dfrac{6}{\frac{3}{5}}$，即：$AB=5\sqrt{2}$；

⑵ $\cos A=-\cos(C+B)=\sin B\sin C-\cos B\cos C$

$\therefore \cos A=-\dfrac{\sqrt{2}}{10}$

又$\because A$为三角形的内角

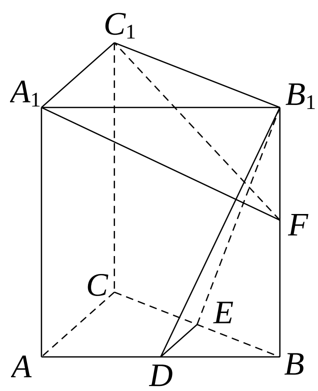
$\therefore \sin A=\dfrac{7\sqrt{2}}{10}$

$\therefore \cos\left(A-\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos A+\dfrac{1}{2}\sin A=\dfrac{7\sqrt{2}-\sqrt{6}}{20}$.

16. （本小题满分 14 分）

如图，在直三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 中，D,E 分别为 AB,BC 的中点，点 F 在侧棱 B_1B 上，

且 $B_1D\perp A_1F$，$A_1C_1\perp A_1B_1$.



求证：⑴ 直线 DE // 平面 A_1C_1F；

⑵ 平面 $B_1DE\perp$ 平面 A_1C_1F.

【答案】见解析；

【解析】⑴ $\because D,E$ 为中点，$\therefore DE$ 为 ΔABC 的中位线

$\therefore DE//AC$

又$\because ABC-A_1B_1C_1$ 为棱柱，$\therefore AC//A_1C_1$

$\therefore DE//A_1C_1$，又$\because A_1C_1\subset$平面 A_1C_1F，且 $DE\not\subset A_1C_1F$

$\therefore DE//$ 平面 A_1C_1F；

⑵ $\because ABC-A_1B_1C_1$ 为直棱柱，$\therefore AA_1\perp$平面 $A_1B_1C_1$

$\therefore AA_1\perp A_1C_1$，又$\because A_1C_1\perp A_1B_1$

且 $AA_1\cap A_1B_1=A_1$，$AA_1,A_1B_1\subset$平面 AA_1B_1B

$\therefore A_1C_1\perp$平面 AA_1B_1B，

又$\because DE//A_1C_1$，$\therefore DE\perp$平面 AA_1B_1B

又$\because A_1F\subset$平面 AA_1B_1B，$\therefore DE\perp A_1F$

又$\because A_1F\perp B_1D$， $DE\cap B_1D=D$，且$DE,B_1D\subset$平面B_1DE

$\therefore A_1F\perp$平面B_1DE，又$\because A_1F\subset A_1C_1F$

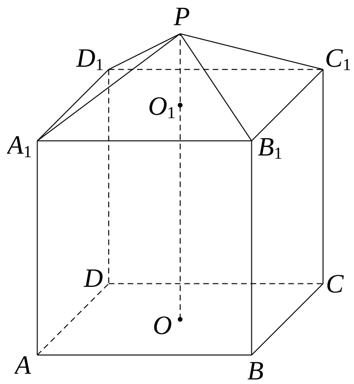
$\therefore$平面$B_1DE\perp$平面A_1C_1F .

17. （本小题满分 14 分）

现需要设计一个仓库，它由上下两部分组成，上部分的形状是正四棱锥$P-A_1B_1C_1D_1$，下部分的形状是正四棱柱$ABCD-A_1B_1C_1D_1$（如图所示），并要求正四棱柱的高O_1O是正四棱锥的高PO_1的4倍.

⑴ 若$AB=6\text{ m}$， $PO_1=2\text{ m}$，则仓库的容积是多少；

⑵ 若正四棱锥的侧棱长为6 m，当PO_1为多少时，仓库的容积最大？



【答案】⑴$312\text{ m}^3$；⑵$2\sqrt{3}\text{ m}$；

【解析】⑴ $PO_1=2\text{ m}$，则$OO_1=8\text{ m}$，

$V_{P-A_1B_1C_1D_1}=\frac{1}{3}S_{ABCD}\cdot PO_1=\frac{1}{3}\times6^2\times2=24\text{ m}^3$， $V_{ABCD-A_1B_1C_1D_1}=S_{ABCD}\cdot OO_1=6^2\times8=288\text{ m}^3$，

$V=V_{P-A_1B_1C_1D_1}+V_{ABCD-A_1B_1C_1D_1}=312\text{ m}^3$，

故仓库的容积为312 m^3；

⑵ 设$PO_1=x\text{ m}$，仓库的容积为$V(x)$

则$OO_1=4x\text{ m}$， $A_1O_1=\sqrt{36-x^2}\text{ m}$， $A_1B_1=\sqrt{2}\cdot\sqrt{36-x^2}\text{ m}$，

$V_{P-A_1B_1C_1D_1}=\frac{1}{3}S_{ABCD}\cdot PO_1=\frac{1}{3}\times\left(\sqrt{72-2x^2}\right)^2\times x=\frac{1}{3}\left(72x-2x^3\right)=24x-\frac{2}{3}x^3\text{ m}^3$，

$V_{ABCD-A_1B_1C_1D_1}=S_{ABCD}\cdot OO_1=\left(\sqrt{72-2x^2}\right)^2\times4x=288x-8x^3\text{ m}^3$，

$V(x)=V_{P-A_1B_1C_1D_1}+V_{ABCD-A_1B_1C_1D_1}=24x-\frac{2}{3}x^3+288x-8x^3=-\frac{26}{3}x^3+312x\left(0<x<6\right)$，

$V'(x)=-26x^2+312=-26\left(x^2-12\right)\left(0<x<6\right)$，

当$x\in\left(0,2\sqrt{3}\right)$时，$V'(x)>0$，$V(x)$单调递增，

当$x\in\left(2\sqrt{3},6\right)$时，$V'(x)<0$，$V(x)$单调递减，

因此，当$x=2\sqrt{3}$时，$V(x)$取到最大值，

即$PO_1=2\sqrt{3}\text{ m}$时，仓库的容积最大.

18. （本小题满分 14 分）

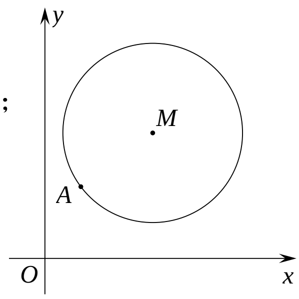
如图，在平面直角坐标系 xOy 中，已知以 M 为圆心的圆 M： $x^2+y^2-12x-14y+60=0$

及其上一点 $A(2,4)$.

⑴ 设圆 N 与 x 轴相切，与圆 M 外切，且圆心 N 在直线 $x=6$ 上，求圆 N 的标准方程；

⑵ 设平行于 OA 的直线 l 与圆 M 相交于 B,C 两点，且 $BC=OA$，求直线 l 的方程；

⑶ 设点 $T(t,0)$ 满足：存在圆 M 上的两点 P 和 Q，使得 $\overrightarrow{TA}+\overrightarrow{TP}=\overrightarrow{TQ}$，求实数 t 的取值范围.



【答案】⑴ $(x-6)^2+(y-1)^2=1$ ⑵ $y=2x+5$ 或 $y=2x-15$ ⑶ $\left[2-2\sqrt{21},2+2\sqrt{21}\right]$；

【解析】⑴ 因为 N 在直线 $x=6$ 上，设 $N(6,n)$，因为与 x 轴相切，

则圆 N 为 $(x-6)^2+(y-n)^2=n^2$， $n>0$

又圆 N 与圆 M 外切，圆 M： $(x-6)^2+(x-7)^2=25$，

则 $|7-n|=|n|+5$，解得 $n=1$，即圆 N 的标准方程为 $(x-6)^2+(y-1)^2=1$；

⑵ 由题意得 $OA=2\sqrt{5}$， $k_{OA}=2$ 设 $l:y=2x+b$，则圆心 M 到直线 l 的距离

$d=\dfrac{|12-7+b|}{\sqrt{2^2+1}}=\dfrac{|5+b|}{\sqrt{5}}$，

则 $BC=2\sqrt{5^2-d^2}=2\sqrt{25-\dfrac{(5+b)^2}{5}}$， $BC=2\sqrt{5}$，即 $2\sqrt{25-\dfrac{(5+b)^2}{5}}=2\sqrt{5}$，

解得 $b=5$ 或 $b=-15$，即 l： $y=2x+5$ 或 $y=2x-15$；

⑶ $\overrightarrow{TA}+\overrightarrow{TP}=\overrightarrow{TQ}$，即 $\overrightarrow{TA}=\overrightarrow{TQ}-\overrightarrow{TP}=\overrightarrow{PQ}$，即 $\left|\overrightarrow{TA}\right|=\left|\overrightarrow{PQ}\right|$，

$\left|\overrightarrow{TA}\right|=\sqrt{(t-2)^2+4^2}$，

又 $\left|\overrightarrow{PQ}\right|\leqslant 10$，

即 $\sqrt{(t-2)^2+4^2}\leqslant 10$，解得 $t\in\left[2-2\sqrt{21},2+2\sqrt{21}\right]$，

对于任意 $t\in\left[2-2\sqrt{21},2+2\sqrt{21}\right]$，欲使 $\overrightarrow{TA}=\overrightarrow{PQ}$，

此时 $\left|\overrightarrow{TA}\right|\le 10$，只需要作直线 TA 的平行线，使圆心到直线的距离为 $\sqrt{25-\dfrac{\left|\overrightarrow{TA}\right|^2}{4}}$，

必然与圆交于 P、Q 两点，此时 $\left|\overrightarrow{TA}\right|=\left|\overrightarrow{PQ}\right|$，即 $\overrightarrow{TA}=\overrightarrow{PQ}$，

因此对于任意 $t\in\left[2-2\sqrt{21},2+2\sqrt{21}\right]$，均满足题意，

综上$t\in\left[2-2\sqrt{21},2+2\sqrt{21}\right]$.

19. （本小题满分 14 分）

已知函数$f\left(x\right)=a^{x}+b^{x}\left(a>0,b>0,a\neq1,b\neq1\right)$.

⑴ 设$a=2$，$b=\frac{1}{2}$.

① 求方程$f\left(x\right)=2$的根；

② 若对于任意$x\in\mathbf{R}$，不等式$f\left(2x\right)\geqslant mf\left(x\right)-6$恒成立，求实数$m$的最大值；

⑵ 若$0<a<1$，$b>1$，函数$g\left(x\right)=f\left(x\right)-2$有且只有 1 个零点，求$ab$的值.

【答案】⑴ ①$x=0$；②$4$；⑵$1$；

【解析】⑴ ① $f\left(x\right)=2^{x}+\left(\frac{1}{2}\right)^{x}$，由$f\left(x\right)=2$可得$2^{x}+\frac{1}{2^{x}}=2$，

则$\left(2^{x}\right)^{2}-2\times2^{x}+1=0$，即$\left(2^{x}-1\right)^{2}=0$，则$2^{x}=1$，$x=0$；

② 由题意得$2^{2x}+\frac{1}{2^{2x}}\geqslant m\left(2^{x}+\frac{1}{2^{x}}\right)-6$恒成立，

令$t=2^{x}+\frac{1}{2^{x}}$，则由$2^{x}>0$可得$t\geqslant2\sqrt{2^{x}\times\frac{1}{2^{x}}}=2$，

此时$t^{2}-2\geqslant mt-6$恒成立，即$m\leqslant\frac{t^{2}+4}{t}=t+\frac{4}{t}$恒成立

$\because t\geqslant2$时$t+\frac{4}{t}\geqslant2\sqrt{t\cdot\frac{4}{t}}=4$，当且仅当$t=2$时等号成立，

因此实数m的最大值为4.

$g\left(x\right)=f\left(x\right)-2=a^{x}+b^{x}-2$，$g'\left(x\right)=a^{x}\ln a+b^{x}\ln b=a^{x}\ln b\left[\frac{\ln a}{\ln b}+\left(\frac{b}{a}\right)^{x}\right]$，

由$0<a<1$，$b>1$可得$\frac{b}{a}>1$，令$h\left(x\right)=\left(\frac{b}{a}\right)^{x}+\frac{\ln a}{\ln b}$，则$h\left(x\right)$递增，

而$\ln a<0,\ln b>0$，因此$x_{0}=\log_{\frac{b}{a}}\left(-\frac{\ln a}{\ln b}\right)$时$h\left(x_{0}\right)=0$，

因此$x\in\left(-\infty,x_{0}\right)$时，$h\left(x\right)<0$，$a^{x}\ln b>0$，则$g'\left(x\right)<0$；

$x\in\left(x_{0},+\infty\right)$时，$h\left(x\right)>0$，$a^{x}\ln b>0$，则$g'\left(x\right)>0$；

则$g\left(x\right)$在$\left(-\infty,x_{0}\right)$递减，$\left(x_{0},+\infty\right)$递增，因此$g\left(x\right)$最小值为$g\left(x_{0}\right)$，

① 若$g\left(x_{0}\right)<0$，$x<\log_{a}2$时，$a^{x}>a^{\log_{a}2}=2$，$b^{x}>0$，则$g\left(x\right)>0$；

$x>\log_b 2$ 时，$a^x>0$，$b^x>b^{\log_b 2}=2$，则 $g(x)>0$；

因此 $x_1<\log_a 2$ 且 $x_1<x_0$ 时，$g(x_1)>0$，因此 $g(x)$ 在 (x_1,x_0) 有零点，

$x_2>\log$ 且 $x_2>x_0$ 时，$g(x_2)>0$，因此 $g(x)$ 在 (x_0,x_2) 有零点，

则 $g(x)$ 至少有两个零点，与条件矛盾；

② 若 $g(x_0)\geq 0$，由函数 $g(x)$ 有且只有 1 个零点，$g(x)$ 最小值为 $g(x_0)$，

可得 $g(x_0)=0$，

由 $g(0)=a^0+b^0-2=0$，

因此 $x_0=0$，

因此 $\log_{\frac{b}{a}}\left(-\frac{\ln a}{\ln b}\right)=0$，即 $-\frac{\ln a}{\ln b}=1$，即 $\ln a+\ln b=0$，

因此 $\ln(ab)=0$，则 $ab=1$.

20. （本小题满分 14 分）

记 $U=\{1,2,\cdots,100\}$．对数列 $\{a_n\}$（$n\in\mathbf{N}^*$）和 U 的子集 T，若 $T=\varnothing$，定义 $S_T=0$；

若 $T=\{t_1,t_2,\cdots,t_k\}$，定义 $S_T=a_{t_1}+a_{t_2}+\cdots+a_{t_k}$．例如：$T=\{1,3,66\}$ 时，$S_T=a_1+a_3+a_{66}$．

现设 $\{a_n\}$（$n\in\mathbf{N}^*$）是公比为3的等比数列，且当 $T=\{2,4\}$ 时，$S_T=30$．

(1) 求数列 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 对任意正整数 k（$1\leqslant k\leqslant 100$），若 $T\subseteq\{1,2,\cdots,k\}$，求证：$S_T<a_{k+1}$；

(3) 设 $C\subseteq U$，$D\subseteq U$，$S_C\geqslant S_D$，求证：$S_C+S_{C\cap D}\geqslant 2S_D$．

【答案】(1) $a_n=3^{n-1}$；(2)(3)详见解析；

【解析】(1) 当 $T=\{2,4\}$ 时，$S_T=a_2+a_4=a_2+9a_2=30$，因此 $a_2=3$，从而 $a_1=\frac{a_2}{3}=1$，$a_n=3^{n-1}$；

(2) $S_T\leqslant a_1+a_2+\cdots a_k=1+3+3^2+\cdots+3^{k-1}=\frac{3^k-1}{2}<3^k=a_{k+1}$；

(3) 设 $A=\complement_C(C\cap D)$，$B=\complement_D(C\cap D)$，则 $A\cap B=\varnothing$，$S_C=S_A+S_{C\cap D}$，$S_D=S_B+S_{C\cap D}$，

$S_C+S_{C\cap D}-2S_D=S_A-2S_B$，因此原题就等价于证明 $S_A\geqslant 2S_B$．

由条件 $S_C\geqslant S_D$ 可知 $S_A\geqslant S_B$．

① 若 $B=\varnothing$，则 $S_B=0$，所以 $S_A\geqslant 2S_B$．

② 若 $B\neq\varnothing$，由 $S_A\geqslant S_B$ 可知 $A\neq\varnothing$，设 A 中最大元素为 l，B 中最大元素为 m，

若 $m \geqslant l+1$，则由第(2)小题，$S_A < a_{l+1} \leqslant a_m \leqslant S_B$，矛盾.

因为 $A \cap B = \varnothing$，所以 $l \neq m$，所以 $l \geqslant m+1$，

$S_B \leqslant a_1 + a_2 + \cdots + a_m = 1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^{m-1} = \dfrac{3^m - 1}{2} < \dfrac{a_{m+1}}{2} \leqslant \dfrac{a_l}{2} \leqslant \dfrac{S_A}{2}$，即 $S_A > 2S_B$.

综上所述，$S_A \geqslant 2S_B$，因此 $S_C + S_{C \cap D} \geqslant 2S_D$.

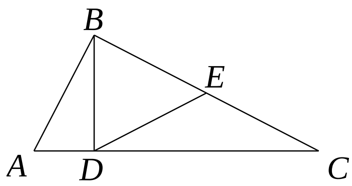
数学Ⅱ（附加题）

21. [选做题]本题包括 A、B、C、D 四小题，请选定其中两小题，并在相应的答题区域内作答，若多做，则按作答的前两小题评分，解答时应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

A．[选修 4-1：几何证明选讲]（本小题满分 10 分）

如图，在 $\triangle ABC$ 中，$\angle ABC = 90°$，$BD \perp AC$，D 为垂足，E 是 BC 中点.

求证：$\angle EDC = \angle ABD$.



【答案】详见解析；

【解析】由 $BD \perp AC$ 可得 $\angle BDC = 90°$，

由 E 是 BC 中点可得 $DE = CE = \dfrac{1}{2}BC$，

则 $\angle EDC = \angle C$，

由 $\angle BDC = 90°$ 可得 $\angle C + \angle DBC = 90°$，

由 $\angle ABC = 90°$ 可得 $\angle ABD + \angle DBC = 90°$，

因此 $\angle ABD = \angle C$，

又 $\angle EDC = \angle C$ 可得 $\angle EDC = \angle ABD$.

B．[选修 4-2：矩阵与变换]（本小题满分 10 分）

已知矩阵 $\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$，矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的逆矩阵 $\boldsymbol{B}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$，求矩阵 $\boldsymbol{AB}$.

【答案】$\begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{4} \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$；

【解析】$\boldsymbol{B} = \left(\boldsymbol{B}^{-1}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{2} & \frac{\frac{1}{2}}{2} \\ \frac{0}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$，因此 $\boldsymbol{AB} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & \frac{5}{4} \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$.

C．[选修 4-4：坐标系与参数方程]（本小题满分 10 分）

在平面直角坐标系 xOy 中，已知直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x=1+\dfrac{1}{2}t, \\ y=\dfrac{\sqrt{3}}{2}t, \end{cases}$ $\left(t\text{ 为参数}\right)$，椭圆 C 的参数方程为 $\begin{cases} x=\cos\theta, \\ y=2\sin\theta, \end{cases}$ $\left(\theta\text{ 为参数}\right)$，设直线 l 与椭圆 C 相交于 A,B 两点，求线段 AB 的长.

【答案】$\dfrac{16}{7}$；

【解析】直线 l 方程化为普通方程为 $\sqrt{3}x-y-\sqrt{3}=0$，

椭圆 C 方程化为普通方程为 $x^2+\dfrac{y^2}{4}=1$，

联立得 $\begin{cases} \sqrt{3}x-y-\sqrt{3}=0 \\ x^2+\dfrac{y^2}{4}=1 \end{cases}$，解得 $\begin{cases} x=1 \\ y=0 \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x=-\dfrac{1}{7} \\ y=-\dfrac{8\sqrt{3}}{7} \end{cases}$，

因此 $AB=\sqrt{\left(1+\dfrac{1}{7}\right)^2+\left(0+\dfrac{8\sqrt{3}}{7}\right)^2}=\dfrac{16}{7}$.

D．[选修 4-5：不等式选讲]（本小题满分 10 分）

设 $a>0$，$|x-1|<\dfrac{a}{3}$，$|y-2|<\dfrac{a}{3}$，求证：$|2x+y-4|<a$.

【答案】详见解析；

【解析】由 $|x-1|<\dfrac{a}{3}$ 可得 $|2x-2|<\dfrac{2a}{3}$，

$|2x+y-4|\leqslant|2x-2|+|y-2|<\dfrac{2a}{3}+\dfrac{a}{3}=a$.

[必做题]第 22 题、第 23 题，每题 10 分，共计 20 分．请在答题卡指定区域内作答，解答时写出文字说明、证明过程或演算步骤．

22. （本小题满分 10 分）

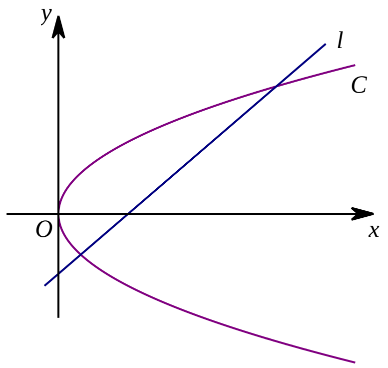
如图，在平面直角坐标系 xOy 中，已知直线 $l:x-y-2=0$，抛物线 $C:y^2=2px\left(p>0\right)$.

⑴ 若直线 l 过抛物线 C 的焦点，求抛物线 C 的方程；

⑵ 已知抛物线 C 上存在关于直线 l 对称的相异两点 P 和 Q.

①求证：线段 PQ 上的中点坐标为 $\left(2-p,-p\right)$；

②求 p 的取值范围.



【答案】(1) $y^2=8x$；(2)①见解析；② $\left(0,\dfrac{4}{3}\right)$

【解析】(1) $\because l:x-y-2=0$，$\therefore l$ 与 x 轴的交点坐标为 $(2,0)$

即抛物线的焦点为 $(2,0)$，$\therefore \dfrac{p}{2}=2$

$\therefore y^2=8x$；

(2) ① 设点 $P(x_1,y_1)$，$Q(x_2,y_2)$

则：$\begin{cases} y_1^{\ 2}=2px_1 \\ y_2^{\ 2}=2px_2 \end{cases}$，即 $\begin{cases} \dfrac{y_1^{\ 2}}{2p}=x_1 \\ \dfrac{y_2^{\ 2}}{2p}=x_2 \end{cases}$，$k_{PQ}=\dfrac{y_1-y_2}{\dfrac{y_1^{\ 2}}{2p}-\dfrac{y_2^{\ 2}}{2p}}=\dfrac{2p}{y_1+y_2}$

又 $\because P,Q$ 关于直线 l 对称，$\therefore k_{PQ}=-1$

即 $y_1+y_2=-2p$，$\therefore \dfrac{y_1+y_2}{2}=-p$

又 $\because PQ$ 中点一定在直线 l 上

$\therefore \dfrac{x_1+x_2}{2}=\dfrac{y_1+y_2}{2}+2=2-p$

$\therefore$ 线段 PQ 上的中点坐标为 $(2-p,-p)$；

② $\because$ 中点坐标为 $(2-p,-p)$

$\therefore \begin{cases} y_1+y_2=-2p \\ x_1+x_2=\dfrac{y_1^{\ 2}+y_2^{\ 2}}{2p}=4-2p \end{cases}$ 即 $\begin{cases} y_1+y_2=-2p \\ y_1^{\ 2}+y_2^{\ 2}=8p-4p^2 \end{cases}$

$\therefore \begin{cases} y_1+y_2=-2p \\ y_1y_2=4p^2-4p \end{cases}$，即关于 $y^2+2py+4p^2-4p=0$ 有两个不等根

$\therefore \Delta>0$，$(2p)^2-4(4p^2-4p)>0$，$\therefore p\in\left(0,\dfrac{4}{3}\right)$.

23. （本小题满分 10 分）

⑴ 求 $7\mathrm{C}_6^3-4\mathrm{C}_7^4$ 的值；

⑵ 设 $m,n\in\mathbf{N}^*$， $n\geqslant m$，求证：

$$(m+1)\mathrm{C}_m^m+(m+2)\mathrm{C}_{m+1}^m+(m+3)\mathrm{C}_{m+2}^m+\cdots+n\mathrm{C}_{n-1}^m+(n+1)\mathrm{C}_n^m=(m+1)\mathrm{C}_{n+2}^{m+2}.$$

【答案】⑴ 0；⑵详见解析；

【解析】⑴ $7\mathrm{C}_6^3-4\mathrm{C}_7^4=7\times20-4\times35=0$；

⑵ 对任意的 $m\in\mathbf{N}^*$，

① 当 $n=m$ 时，左边 $=(m+1)\mathrm{C}_m^m=m+1$，右边 $=(m+1)\mathrm{C}_{m+2}^{m+2}=m+1$，等式成立，

② 假设 $n=k(k\geqslant m)$ 时命题成立，

即 $(m+1)\mathrm{C}_m^m+(m+2)\mathrm{C}_{m+1}^m+(m+3)\mathrm{C}_{m+2}^m+\cdots+k\mathrm{C}_{k-1}^m+(k+1)\mathrm{C}_k^m=(m+1)\mathrm{C}_{k+2}^{m+2}$，

当 $n=k+1$ 时，

左边 $=(m+1)\mathrm{C}_m^m+(m+2)\mathrm{C}_{m+1}^m+(m+3)\mathrm{C}_{m+2}^m+\cdots+k\mathrm{C}_{k-1}^m+(k+1)\mathrm{C}_k^m+(k+2)\mathrm{C}_{k+1}^m$

$=(m+1)\mathrm{C}_{k+2}^{m+2}+(k+2)\mathrm{C}_{k+1}^m$，

右边 $=(m+1)\mathrm{C}_{k+3}^{m+2}$，

而 $(m+1)\mathrm{C}_{k+3}^{m+2}-(m+1)\mathrm{C}_{k+2}^{m+2}$，

$$=(m+1)\left[\frac{(k+3)!}{(m+2)!(k-m+1)!}-\frac{(k+2)!}{(m+2)!(k-m)!}\right]$$

$$=(m+1)\times\frac{(k+2)!}{(m+2)!(k-m+1)!}\left[k+3-(k-m+1)\right]$$

$$=(k+2)\frac{(k+1)!}{m!(k-m+1)!}$$

$$=(k+2)\mathrm{C}_{k+1}^m$$

因此 $(m+1)\mathrm{C}_{k+2}^{m+2}+(k+2)\mathrm{C}_{k+1}^m=(m+1)\mathrm{C}_{k+3}^{m+2}$，

因此左边=右边，

因此 $n=k+1$ 时命题也成立，

综合①②可得命题对任意 $n\geqslant m$ 均成立.

另解：因为 $(k+1)\mathrm{C}_k^m=(m+1)\mathrm{C}_{k+1}^{m+1}$，所以

左边 $=(m+1)\mathrm{C}_{m+1}^{m+1}+(m+1)\mathrm{C}_{m+2}^{m+1}+\cdots+(m+1)\mathrm{C}_{n+1}^{m+1}=(m+1)\left(\mathrm{C}_{m+1}^{m+1}+\mathrm{C}_{m+2}^{m+1}+\cdots+\mathrm{C}_{n+1}^{m+1}\right)$

又由 $\mathrm{C}_n^k=\mathrm{C}_{n-1}^k+\mathrm{C}_{n-1}^{k-1}$，知

$\mathrm{C}_{n+2}^{m+2}=\mathrm{C}_{n+1}^{m+2}+\mathrm{C}_{n+1}^{m+1}=\mathrm{C}_n^{m+2}+\mathrm{C}_n^{m+1}+\mathrm{C}_{n+1}^{m+1}=\cdots=\mathrm{C}_{m+2}^{m+2}+\mathrm{C}_{m+2}^{m+1}+\cdots+\mathrm{C}_{n+1}^{m+1}=\mathrm{C}_{m+1}^{m+1}+\mathrm{C}_{m+2}^{m+1}+\cdots+\mathrm{C}_{n+1}^{m+1}$，

所以，左边 $=$ 右边.