

厦门市 2017 届高中毕业班第二次质量检查

数学(理科)试题

本试卷分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分. 满分 150 分, 考试时间 120 分钟.

考生注意:

1. 答题前, 考生务必将自己的准考证号、姓名填写在答题卡上. 考生要认真核对答题卡上粘贴的条形码的“准考证号、姓名、考试科目”与考生本人准考证号、姓名是否一致.

2. 第 I 卷每小题选出答案后, 用 2B 铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑, 如需改动, 用橡皮擦干净后, 再选涂其他答案标号. 第 II 卷用 0.5 毫米的黑色墨水签字笔在答题卡上书写作答. 若在试题卷上作答, 答案无效.

第 I 卷(选择题 共 60 分)

一、选择题: 本大题共 12 小题, 每小题 5 分, 在每小题给出的四个选项中, 只有一项是符合题目要求的.

1. 已知全集为 $\mathbf{R}$, 集合 $A = \{x \mid x^2 - 2x < 3\}$, $B = \{x \mid x > 2\}$, 则 $A \cap (\complement_{\mathbf{R}} B) =$

- A. $\{x \mid -1 < x < 2\}$ B. $\{x \mid 2 < x < 3\}$
C. $\{x \mid x < 3\}$ D. $\{x \mid -1 < x \leq 2\}$

2. 复数 z 满足 $(1 + \sqrt{3}i)z = 4$, 则 $|z|$ 等于

- A. 1 B. $\sqrt{2}$ C. 2 D. 4

3. 已知实数 x, y 满足约束条件 $\begin{cases} x \geq 2 \\ x + y \geq 4 \\ 2x - y - 12 \leq 0 \end{cases}$, 则目标函数 $z = 3x + y$ 的最小值为

- A. -8 B. -2 C. 8 D. $\frac{44}{3}$

4. 执行如图所示的程序框图, 若输出的 S 的值为 12, 则输入的 a 的值可以为

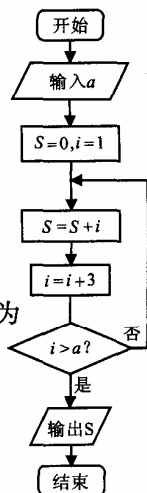
- A. 9 B. 10 C. 11 D. 12

5. 《九章算术》是我国古代内容极为丰富的数学名著, 书中有如下问题: “今有五人分五钱, 令上二人所得与下三人等. 问各得几何?” 其意思为: “现有甲乙丙丁戊五人依次差值等额分五钱, 要使甲乙两人所得的钱与丙丁戊三人所得的钱相等, 问每人各得多少钱?” 根据题意, 乙得

- A. $\frac{2}{3}$ 钱 B. $\frac{5}{6}$ 钱 C. 1 钱 D. $\frac{7}{6}$ 钱

6. 已知 A, B 为抛物线 $E: y^2 = 2px (p > 0)$ 上异于顶点 O 的两点, $\triangle AOB$ 是等边三角形, 其面积为 $48\sqrt{3}$, 则 p 的值为

- A. 2 B. $2\sqrt{3}$ C. 4 D. $4\sqrt{3}$



(第4题图)

7. 已知函数 $f(x) = \sqrt{3}\sin(2x + \varphi) + \cos(2x + \varphi)$ 为偶函数,且在 $[0, \frac{\pi}{4}]$ 上是增函数,则 φ 的一个可能值为
- A. $\frac{\pi}{3}$ B. $\frac{2\pi}{3}$ C. $\frac{4\pi}{3}$ D. $\frac{5\pi}{3}$
8. 甲、乙两名游客来厦门旅游,计划分别从鼓浪屿、曾厝垵、植物园、南普陀四个旅游景点中选取 3 个景点参观游览,则两人选取的景点中有且仅有两个景点相同的概率为
- A. $\frac{3}{16}$ B. $\frac{3}{8}$ C. $\frac{5}{8}$ D. $\frac{3}{4}$
9. 已知等腰梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel DC$, $CD = 2AB = 4$, $\angle A = \frac{2\pi}{3}$, 向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 满足 $\vec{AD} = 2\vec{a}$, $\vec{BC} = 2\vec{a} + \vec{b}$, 则下列式子不正确的是
- A. $|\vec{b}| = 2$ B. $|\vec{2a} - \vec{b}| = 2\sqrt{3}$ C. $2\vec{a} \cdot \vec{b} = -2$ D. $\vec{a} \cdot (\vec{a} + \vec{b}) = 1$
10. 已知圆 C 的圆心在双曲线 $E: x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ 的右支上,圆 C 过双曲线 E 的右焦点 F , 且与直线 $x = -2$ 相切, 则圆 C 截 x 轴所得的线段长为
- A. 1 B. 2 C. 4 D. 8
11. 过正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的顶点 A 作平面 α , 使得正方体的各棱与平面 α 所成的角均相等, 则满足条件的平面 α 的个数是
- A. 1 B. 4 C. 6 D. 8
12. 定义在 $\mathbf{R}$ 上的函数 $f(x)$ 满足: $f(x) = \frac{1}{2}f(x - 2\pi)$, 且当 $x \in [0, 2\pi)$ 时, $f(x) = 8\sin x$, 则函数 $g(x) = f(x) - \lg x$ 的零点个数是
- A. 5 B. 6 C. 7 D. 8

第 II 卷(非选择题 共 90 分)

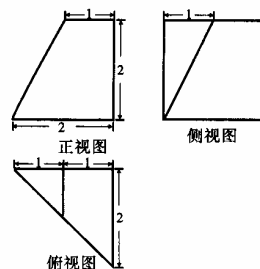
二、填空题:本大题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分.

13. 已知 $(2x - \frac{1}{\sqrt{x}})^n$ 展开式的二项式系数之和为 64, 则展开

式中常数项是 ▲. (用数字作答)

14. 某几何体的三视图如图所示, 则该几何体的体积是 ▲.

15. 若关于 x 的方程 $e^{2x} + ae^x + 1 = 0$ 有解, 则实数 a 的取值范围是 ▲.



(第14题图)

16. 已知数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_1 = \frac{1}{3}, a_2 = \frac{2}{3}, a_{n+2} - a_{n+1} = (-1)^{n+1}(a_{n+1} - a_n) (n \in \mathbf{N}^*)$, 数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n , 则 $S_{2017} =$ ▲.

三、解答题:本大题共 6 小题,共 70 分,解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 12 分)

在 $\triangle ABC$ 中,角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $b\cos C = (2a - c)\cos B$.

(I) 求角 B 的大小;

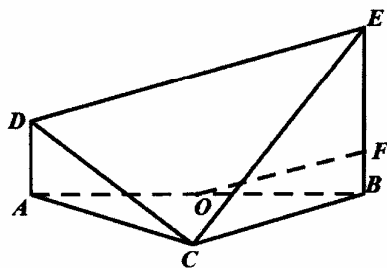
(II) 已知 $b = \sqrt{3}$, BD 为 AC 边上的高, 求 BD 的取值范围.

18. (本小题满分 12 分)

如图,在以 A, B, C, D, E 为顶点的五面体中, $AD \perp$ 平面 ABC , $AD \parallel BE$, $AC \perp CB$, $AB = 2BE = 4AD = 4$.

(I) O 为 AB 的中点, F 是线段 BE 上的一点, $BE = 4BF$, 证明: $OF \parallel$ 平面 CDE ;

(II) 当直线 DE 与平面 CBE 所成角的正切值为 $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ 时, 求平面 CDE 与平面 ABC 所成锐二面角的余弦值.



(第18题图)

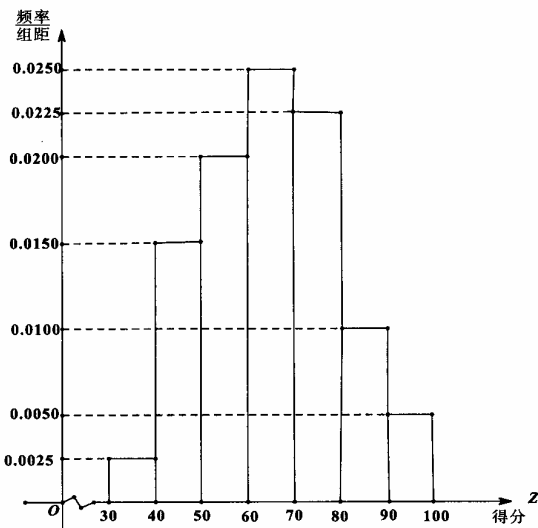
19. (本小题满分 12 分)

2017 年是某市大力推进居民生活垃圾分类的关键一年,有关部门为宣传垃圾分类知识,面向该市市民进行了一次“垃圾分类知识”的网络问卷调查,每位市民仅有一次参与机会. 通过抽样,得到参与问卷调查中的 1000 人的得分数据,其频率分布直方图如图所示:

(I) 由频率分布直方图可以认为,此次问卷调查的得分 Z 服从正态分布 $N(\mu, 210)$, μ 近似为这 1000 人得分的平均值(同一组数据用该区间的中点值作代表), 利用该正态分布, 求 $P(50.5 < Z < 94)$;

(II) 在(I)的条件下,有关部门为此次参加问卷调查的市民制定如下奖励方案:

- (i) 得分不低于 μ 可获赠 2 次随机话费, 得分低于 μ 则只有 1 次;
- (ii) 每次赠送的随机话费和对应概率如下:



(第19题图)

赠送话费(单位:元)	10	20
概率	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

现有一位市民要参加此次问卷调查, 记 X (单位:元) 为该市民参加问卷调查获赠的话费, 求 X 的分布列.

附: $\sqrt{210} \approx 14.5$

若 $Z \sim N(\mu, \delta^2)$, 则 $P(\mu - \delta < Z < \mu + \delta) = 0.6826$, $P(\mu - 2\delta < Z < \mu + 2\delta) = 0.9544$.

20. (本小题满分 12 分)

在平面直角坐标系 xOy 中, $\triangle ABC$ 的周长为 12, AB, AC 边的中点分别为 $F_1(-1, 0)$ 和 $F_2(1, 0)$, 点 M 为 BC 边的中点.

(I) 求点 M 的轨迹方程;

(II) 设点 M 的轨迹为曲线 Γ , 直线 MF_1 与曲线 Γ 另一个交点为 N , 线段 MF_2 中点为 E , 记 $S = S_{\triangle NF_1O} + S_{\triangle MF_1E}$, 求 S 的最大值.

21. (本小题满分 12 分)

函数 $f(x) = \frac{\ln x + 2}{x} + a(x - 1) - 2$.

(I) 当 $a = 0$ 时, 求函数 $f(x)$ 的极值;

(II) 若对任意 $x \in (0, 1) \cup (1, +\infty)$, 不等式 $\frac{f(x)}{1-x} < \frac{a}{x}$ 恒成立, 求实数 a 的取值范围.

选考题(请考生在 22、23 两题中任选一题作答. 注意: 只能做所选定的题目, 如果多做, 则按所做第一个题目计分, 做答时, 请用 2B 铅笔在答题卡上将所选题号后的方框涂黑.)

22. (本小题满分 10 分) 选修 4-4: 坐标系与参数方程

在平面直角坐标系 xOy 中, 直线 l 的参数方程为 $\begin{cases} x = 1 + t\cos\alpha \\ y = \sqrt{3} + t\sin\alpha \end{cases}$ (t 为参数), 其中 $0 \leq \alpha < \pi$.

在以 O 为极点, x 轴的正半轴为极轴的极坐标系中, 曲线 $C_1: \rho = 4\cos\theta$. 直线 l 与曲线 C_1 相切.

(I) 将曲线 C_1 的极坐标方程化为直角坐标方程, 并求 α 的值;

(II) 已知点 $Q(2, 0)$, 直线 l 与曲线 $C_2: x^2 + \frac{y^2}{3} = 1$ 交于 A, B 两点, 求 $\triangle ABQ$ 的面积.

23. (本小题满分 10 分) 选修 4-5: 不等式选讲

设函数 $f(x) = \left| x + \frac{3}{a} \right| + |x - 2a|$.

(I) 证明: $f(x) \geq 2\sqrt{6}$;

(II) 若 $a > 0$, 且 $f(2) < 5$, 求 a 的取值范围.

厦门市2017届高中毕业班第二次质量检查
理科数学试题答题卡

姓 名 _____

准考证号 _____

考生条形码区域

考生禁填

缺考考生,由监考员贴条形码,并用2B铅笔填涂右面的缺考标记



请注意粘贴范围

填涂样例

正确填涂



注意事项

1. 答题前,考生先将自己的姓名、准考证号填写清楚,并认真核对条形码上的准考证号、姓名及科目。
2. 选择题答案必须使用2B铅笔按“填涂样例”正确填涂;非选择题答案必须使用0.5毫米的黑色签字笔书写,字体工整、笔迹清楚。
3. 请按照题号顺序在各题目的答题区域内作答,超出答题区域书写的答案无效;在草稿纸、试题卷上答题无效。
4. 保持卡面清洁,不折叠、不破损。
5. 做选考题时,考生按照题目要求作答,并用2B铅笔在答题卡上把所选题目对应的标号涂黑。

第I卷 选择题 (用2B铅笔填涂)

- | | | |
|-------------------|-------------------|--------------------|
| 1 [A] [B] [C] [D] | 5 [A] [B] [C] [D] | 9 [A] [B] [C] [D] |
| 2 [A] [B] [C] [D] | 6 [A] [B] [C] [D] | 10 [A] [B] [C] [D] |
| 3 [A] [B] [C] [D] | 7 [A] [B] [C] [D] | 11 [A] [B] [C] [D] |
| 4 [A] [B] [C] [D] | 8 [A] [B] [C] [D] | 12 [A] [B] [C] [D] |

第II卷 非选择题 (用黑色签字笔书写)

二、填空题 (用黑色签字笔书写)

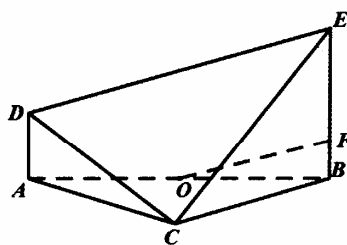
13. _____ 14. _____

15. _____ 16. _____

三、解答题 (用黑色签字笔书写)

17. (12分)

18. (12分)



(第18题图)

19. (12分)

20. (12分)

21. (12分)

选考题（10分） 请从22、23两题中任选1题作答，注意：只能做所选定的题目，如果多做，则按所做第一个题目计分，作答时，请用2B铅笔在答题卡上将所选题号后的方框涂黑。

我所选择的题号是

[22]

[23]



请不要在此区域作答

考生条形码区域

厦门市 2017 届高中毕业班第二次质量检查

数学（理科）试题答案

一、选择题：本大题共 12 小题，每小题 5 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1-5 DCCAD 6-10 ACDDDB 11-12 BA

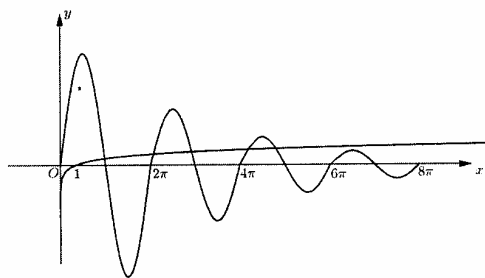
12. 解：函数 $f(x)$ 满足 $f(x) = f(x - 2\pi)$ 即图象的周期为 2π ，

$f(x) = \frac{1}{2}f(x - 2\pi)$ 可以理解为 $f(x)$ 的图象每向右平移 1 个周

期，横坐标不变，纵坐标缩小为原来的 $\frac{1}{2}$ 。 $f(x) - \lg x = 0$ 零点

个数等价于 $y = f(x)$ 与 $y = \lg x$ 的图象的交点个数，如图所示，

共 5 个交点。



二、填空题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分。

13. 60 14. $\frac{11}{3}$ 15. $(-\infty, -2]$ 16. $\frac{4033}{3}$

16. 解：当 n 为偶数时， $a_{n+2} - a_{n+1} = -a_{n+1} + a_n$ ， $\therefore a_{n+2} = a_n$ (1)

当 n 为奇数时， $a_{n+2} - a_{n+1} = a_{n+1} - a_n$ ， $\therefore a_{n+2} + a_n = 2a_{n+1}$ ① 从而 $\therefore a_{n+4} + a_{n+2} = 2a_{n+3}$ ②

所以②—①得： $\therefore a_{n+4} - a_n = 2a_{n+3} - 2a_{n+1} = 0$ 。 $\therefore a_{n+4} = a_n$ (2)

综合 (1) (2) 可知数列 $\{a_n\}$ 是周期为 4 的数列。

由 $a_1 = \frac{1}{3}, a_2 = \frac{2}{3}$ 及递推关系可以求得 $a_3 = 1, a_4 = \frac{2}{3}$ ， $\therefore a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = \frac{8}{3}$

$$\therefore S_{2017} = 504 \times \frac{8}{3} + \frac{1}{3} = \frac{4033}{3}$$

另解：可通过已知条件求得

$a_1 = \frac{1}{3}, a_2 = \frac{2}{3}, a_3 = 1, a_4 = \frac{2}{3}, a_5 = \frac{1}{3}, a_6 = \frac{2}{3}, a_7 = 1, a_8 = \frac{2}{3}, a_9 = \frac{1}{3}, \dots$ ，观察出周期为 4，

$$\therefore S_{2017} = 504 \times \frac{8}{3} + \frac{1}{3} = \frac{4033}{3}$$

三、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. 本题考查利用正、余弦定理求解三角形中的边角问题；考查三角函数的最值及均值不等式；考查三角化简中的“归一”思想。

解：(I) 由 $b \cos C = (2a - c) \cos B$ 得， $\sin B \cos C = (2 \sin A - \sin C) \cos B$ 2 分

即 $\sin B \cos C + \sin C \cos B = 2 \sin A \cos B$ ，得 $\sin(B + C) = 2 \sin A \cos B$

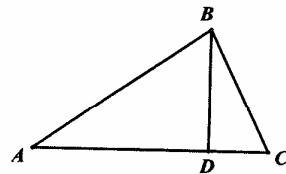
即 $\sin A = 2 \sin A \cos B$ 4 分

得 $\cos B = \frac{1}{2}$, 又 $B \in (0, \pi)$, 于是 $B = \frac{\pi}{3}$ 5 分

(II) 法一: 由 (I) 得, $\frac{b}{\sin B} = \frac{\sqrt{3}}{\frac{1}{2}} = 2$

$$\therefore \frac{a}{\sin A} = \frac{c}{\sin C} = \frac{b}{\sin B} = 2$$

$\therefore c = 2 \sin C$ 7 分



在 $Rt\triangle ABD$ 中, $BD = AB \cdot \sin A = 2 \sin C \cdot \sin(\frac{2\pi}{3} - C)$ 8 分

$$= 2 \sin C \cdot (\frac{\sqrt{3}}{2} \cos C + \frac{1}{2} \sin C)$$

$$= \sqrt{3} \sin C \cos C + \sin^2 C$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \sin 2C + \frac{1}{2} (1 - \cos 2C)$$

$$= \sin(2C - \frac{\pi}{6}) + \frac{1}{2} \text{10 分}$$

$$\because 0 < C < \frac{2\pi}{3} \therefore -\frac{\pi}{6} < 2C - \frac{\pi}{6} < \frac{7\pi}{6}$$

$$\therefore -\frac{1}{2} < \sin(2C - \frac{\pi}{6}) \leq 1, \text{ 即 } BD \in (0, \frac{3}{2}] \text{12 分}$$

法二: 由余弦定理 $b^2 = a^2 + c^2 - 2ac \cos B$ 得

$$3 = a^2 + c^2 - ac, \text{ 即 } 3 + ac = a^2 + c^2 \text{7 分}$$

由 $a^2 + c^2 \geq 2ac$, 得 $3 + ac \geq 2ac$

$$\therefore 0 < ac \leq 3 \text{9 分}$$

在 $\triangle ABC$ 中, 由 $\frac{1}{2} ac \sin B = \frac{1}{2} AC \cdot BD$, 得 $BD = \frac{1}{2} ac$ 11 分

$$\therefore BD \in (0, \frac{3}{2}] \text{12 分}$$

18. 本小题主要考查直线与直线、直线与平面的位置关系及直线与平面、平面与平面所成角的基础知识, 考查空间想象能力、运算求解能力、推理论证能力、运算求解能力, 考查化归与转化思想、函数与方程思想. 满分 12 分.

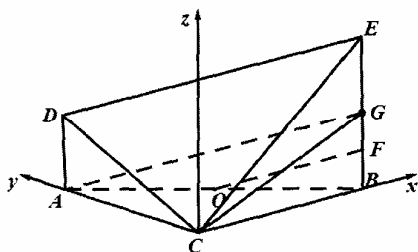
(I) 取 BE 的中点 G , 连接 AG , $\because BE = 2AD$, G 为 BE 中点, $\therefore AD = EG$

$\because AD \parallel BE \therefore AD \parallel EG$, $\therefore AGED$ 是平行四边形, $DE \parallel AG$ 2 分

$\triangle ABG$ 中, F 是 BG 中点, O 是 AB 中点,

所以 OF 是中位线, $\therefore OF \parallel AG \therefore OF \parallel DE$,4 分

$OF \not\subset$ 平面 CDE , $DE \subset$ 平面 CDE , $\therefore OF \parallel$ 平面 CDE5 分



(II) 方法一: 连接 CG , 因为 $AD \perp$ 平面 ABC , $\therefore AD \parallel BE$, 所以 $BE \perp$ 平面 ABC ,

$\therefore BE \perp AC$ 又 $AC \perp CB \therefore AC \perp$ 平面 EBC 6 分

$\therefore \angle AGC$ 是 AG 与平面 CBE 所成的角,

$\therefore DE \parallel AG$, AG 与平面 CBE 所成的角等于 DE 与平面 CBE 所成的角7 分

$\therefore$ 在 $Rt\triangle ACG$ 中, $\tan \angle AGC = \frac{AC}{CG} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

在 $Rt\triangle ABG$ 中 $AG^2 = AB^2 + BG^2 = 4^2 + 1^2 = 17$

$\therefore$ 在 $Rt\triangle ACG$ 中, $AC^2 + CG^2 = AG^2 = 17$,

解得 $AC = 2\sqrt{2}$, $\therefore BC = \sqrt{AB^2 - AC^2} = 2\sqrt{2}$ 8 分

以 C 为坐标原点, $\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}$ 分别为 x, y 轴, 如图建立空间直角坐标系

$\therefore D(0, 2\sqrt{2}, 1), E(2\sqrt{2}, 0, 2)$,9 分

设平面 CDE 的法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$

$\therefore \overrightarrow{CD} \cdot \vec{n} = 0, \overrightarrow{CE} \cdot \vec{n} = 0$, $\therefore \begin{cases} 2\sqrt{2}y + z = 0 \\ 2\sqrt{2}x + 2z = 0 \end{cases}$ 令 $z = 2\sqrt{2}$, 则 $x = -1, y = -2$

$\therefore$ 平面 CDE 的一个法向量为 $\vec{n} = (-2, -1, 2\sqrt{2})$,10 分

又平面 ACB 的法向量为 $\vec{m} = (0, 0, 1)$

$\therefore \cos \langle \vec{m}, \vec{n} \rangle = \frac{\vec{m} \cdot \vec{n}}{|\vec{m}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{4+1+8}} = \frac{2\sqrt{26}}{13}$ 11 分

所以平面 CDE 与平面 ABC 所成锐二面角的余弦值 $\frac{2\sqrt{26}}{13}$12 分

方法二: 以 C 为坐标原点, $\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CA}$ 分别为 x, y 轴, 如图建立空间直角坐标系

设 $CA = a, CB = b$, $\therefore D(0, a, 1), E(b, 0, 2)$, $\therefore \overrightarrow{DE} = (b, -a, 1)$ 6 分

又平面 CBE 的一个法向量 $\vec{n} = (0, 1, 0)$, 设 DE 与平面 CBE 所成角 α ,

$$\therefore \tan \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}, \therefore \sin \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{17}} \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$\therefore \sin \alpha = \frac{|\overrightarrow{DE} \cdot \vec{n}|}{|\overrightarrow{DE}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2 + 1}} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{17}} \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

又在在 $Rt\triangle ABC$ 中 $AB^2 = CB^2 + CA^2$, $\therefore a^2 + b^2 = 16$, 解得 $a = 2\sqrt{2}, b = 2\sqrt{2}$ 9 分

$\therefore D(0, 2\sqrt{2}, 1), E(2\sqrt{2}, 0, 2)$, 设平面 CDE 的法向量为 $\vec{n} = (x, y, z)$

$$\therefore \overrightarrow{CD} \cdot \vec{n} = 0, \overrightarrow{CE} \cdot \vec{n} = 0, \therefore \begin{cases} 2\sqrt{2}y + z = 0 \\ 2\sqrt{2}x + 2z = 0 \end{cases} \text{ 令 } z = 2\sqrt{2}, \text{ 则 } x = -1, y = -2$$

$\therefore$ 平面 CDE 的一个法向量为 $\vec{n} = (-2, -1, 2\sqrt{2})$,10 分

$$\text{又平面 } ACB \text{ 的法向量为 } \vec{m} = (0, 0, 1) \therefore \cos < \vec{m}, \vec{n} > = \frac{\vec{m} \cdot \vec{n}}{|\vec{m}| \cdot |\vec{n}|} = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{4+1+8}} = \frac{2\sqrt{26}}{13} \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

所以平面 CDE 与平面 ABC 所成锐二面角的余弦值 $\frac{2\sqrt{26}}{13}$ 12 分

19. 本小题考查频率分布直方图、正态分布、条件概率随机变量的数学期望等基础知识, 考查数据分析与处理、运算求解能力, 解决实际问题的能力, 考查化归与转化思想及统计思想. 满分 12 分.

解: (I) 从这 1000 人问卷调查得到的平均值 μ 为

$$\begin{aligned} \mu &= 35 \times 0.025 + 45 \times 0.15 + 55 \times 0.20 + 65 \times 0.25 + 75 \times 0.225 + 85 \times 0.1 + 95 \times 0.05 \dots\dots\dots 1 \text{ 分} \\ &= 0.875 + 6.75 + 11 + 16.25 + 16.875 + 8.5 + 4.75 \\ &= 65 \dots\dots\dots 3 \text{ 分} \end{aligned}$$

$\therefore$ 由于得分 Z 服从正态分布 $N(65, 210)$,

$$\therefore P(50.5 < Z < 94) = P(60 - 14.5 < Z < 60 + 14.5 \times 2) = \frac{0.6826 + 0.9544}{2} = 0.8185 \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$(II) \text{ 设得分不低于 } \mu \text{ 分的概率为 } p, \quad p = P(Z \geq \mu) = \frac{1}{2} \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

(或由频率分布直方图知 $p = 0.025 + 0.15 + 0.2 + \frac{0.225}{2} = 0.5 = \frac{1}{2}$)

法一: X 的取值为 10, 20, 30, 407 分

$$P(X = 10) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}; \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$P(X = 20) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{7}{18}; \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$P(X=30)=\frac{1}{2}\times C_2^1\left(\frac{2}{3}\times\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{9}; \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$P(X=40)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{18}; \quad \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

所以 X 的分布列为

X	10	20	30	40
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{18}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{18}$

.....12 分

法二：2 次随机赠送的话费及对应概率如下

2 次话费总和	20	30	40
P	$\frac{2}{3}\times\frac{2}{3}=\frac{4}{9}$	$C_2^1\left(\frac{1}{3}\times\frac{2}{3}\right)=\frac{4}{9}$	$\frac{1}{3}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{9}$

X 的取值为 10, 20, 30, 407 分

$$P(X=10)=\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{3}; \quad \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$P(X=20)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{4}{9}=\frac{7}{18}; \quad \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$P(X=30)=\frac{1}{2}\times\frac{4}{9}=\frac{2}{9}; \quad \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$P(X=40)=\frac{1}{2}\times\frac{1}{9}=\frac{1}{18}; \quad \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

所以 X 的分布列为

X	10	20	30	40
P	$\frac{1}{3}$	$\frac{7}{18}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{18}$

.....12 分

20. 本题考查曲线与方程、直线与椭圆的位置关系等，考查逻辑推理能力、运算求解能力和抽象概括能力。考查运用定义求动点轨迹的方法，完备性与纯粹性；考查圆锥曲线最值问题的解法，通过合理转化变形，建构函数模型研究最值。考查转化化归思想、函数与方程思想。

解：（I）依题意有： $|F_1F_2|=2$ ，且 $|MF_1|+|MF_2|+|F_1F_2|=\frac{1}{2}\times 12=6$ ，

$$\therefore |MF_1| + |MF_2| = 4 > |F_1F_2| = 2, \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

故点 M 的轨迹 C 是以 $F_1(-1,0)$ 和 $F_2(1,0)$ 为焦点, 长轴长为 4 的椭圆 $\dots\dots\dots 3 \text{ 分}$

考虑到三个中点不可共线, 故点 M 不落在 x 上,

$$\text{综上, 所求轨迹方程: } \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 (y \neq 0) \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

(II) 解法一: 设 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$,

显然直线 MF_1 不与 x 轴重合, 不妨设直线 MF_1 的方程为: $x = ty - 1$,

与椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 (y \neq 0)$ 方程联立可得:

$$3(ty-1)^2 + 4y^2 = 12, \text{ 整理得: } (3t^2 + 4)y^2 - 6ty - 9 = 0, \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$\Delta = 36t^2 + 36(3t^2 + 4) = 144(t^2 + 1) > 0, \begin{cases} y_1 + y_2 = \frac{6t}{3t^2 + 4} \\ y_1 y_2 = -\frac{9}{3t^2 + 4} \end{cases} \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$S_{\triangle NF_1O} = \frac{1}{2} |F_1O| |y_1| = \frac{1}{2} |y_1|, S_{\triangle MF_1E} = \frac{1}{2} S_{\triangle MF_1F_2} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} |F_1F_2| |y_2| = \frac{1}{2} |y_2| \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\therefore S = S_{\triangle NF_1O} + S_{\triangle MF_1E} = \frac{1}{2} (|y_1| + |y_2|) = \frac{1}{2} (|y_1 - y_2|) = \frac{1}{2} \sqrt{(y_1 + y_2)^2 - 4y_1 y_2}$$

$$\therefore S = S_{\triangle NF_1O} + S_{\triangle MF_1E} = \frac{1}{2} \cdot \frac{12\sqrt{t^2 + 1}}{3t^2 + 4} = 6 \frac{\sqrt{t^2 + 1}}{3t^2 + 4} \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

令 $u = 3t^2 + 4 (u \geq 4)$, 则

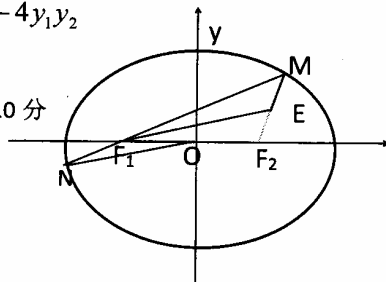
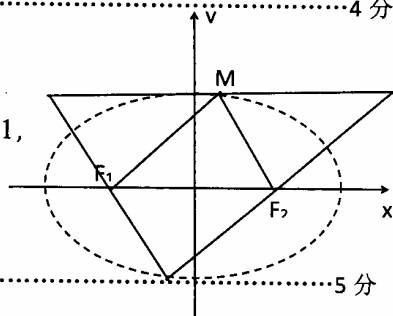
$$S = \varphi(u) = 6 \frac{\sqrt{u-1}}{u} = 6 \sqrt{-\frac{1}{3} \left(\frac{1}{u^2} - \frac{1}{u} \right)} = 6 \sqrt{-\frac{1}{3} \left[\left(\frac{1}{u} - \frac{1}{2} \right)^2 - \frac{1}{4} \right]} \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

$$\because u \geq 4, \therefore 0 < \frac{1}{u} \leq \frac{1}{4}, \text{ 当 } \frac{1}{u} = \frac{1}{4}, \text{ 即 } t = 0 \text{ 时, } \therefore S_{\max} = \frac{3}{2}.$$

$$\therefore \text{当直线 } MN \perp x \text{ 轴时, } \therefore S_{\max} = \frac{3}{2}. \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

$$(\text{另法: } \therefore S = S_{\triangle NF_1O} + S_{\triangle MF_1E} = \frac{1}{2} \cdot \frac{12\sqrt{t^2 + 1}}{3t^2 + 4} = 6 \frac{\sqrt{t^2 + 1}}{3t^2 + 4} \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

$$\text{令 } u = \sqrt{t^2 + 1} (u \geq 1), \text{ 则 } \therefore S = h(u) = \frac{6u}{3u^2 + 1} = \frac{6}{3u + \frac{1}{u}},$$



记 $\varphi(u) = 3u + \frac{1}{u}$, $\varphi'(u) = 3 - \frac{1}{u^2} > 0$, $\therefore \varphi(u)$ 在 $u \in [1, +\infty)$ 上单调递增, $\varphi(u) \geq \varphi(1) = 4$,

即当 $u = 1$, 即 $t = 0$ 时, $\therefore S_{\max} = \frac{3}{2}$ 12 分)

解法二: ①当直线 MN 的斜率不存在时, 其方程为: $x = -1$, 此时 $M(-1, \frac{3}{2}), N(-1, -\frac{3}{2})$,

$$S_{\triangle MNO} = \frac{1}{2} \times 1 \times (\frac{3}{2} - (-\frac{3}{2})) = \frac{3}{2} \text{5 分}$$

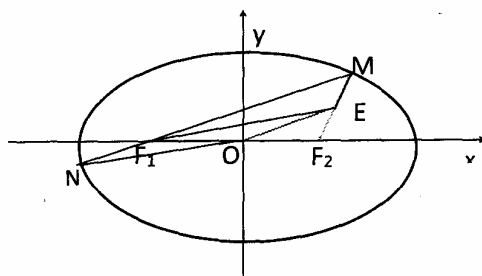
②当直线 MN 的斜率存在时, 设其方程为: $y = k(x+1)$,

设 $M(x_1, y_1), N(x_2, y_2)$, 显然直线 MN 不与 x 轴重合,

即 $k \neq 0$ 与椭圆 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1 (y \neq 0)$ 方程联立可得:

$$(3+4k^2)x^2 + 8k^2x + 4k^2 - 12 = 0,$$

$$\Delta = 144(k^2+1) > 0, \begin{cases} x_1 + x_2 = -\frac{8k^2}{3+4k^2} \\ x_1 x_2 = \frac{4k^2-12}{3+4k^2} \end{cases} \text{7 分}$$



$\therefore O, E$ 分别为 MF_2, F_1F_2 的中点, $\therefore OE \parallel MF_1$,

故 $\triangle MF_1E$ 与 $\triangle MF_1O$ 同底等高, $\therefore S_{\triangle MF_1E} = S_{\triangle MF_1O}$ 8 分

点 O 到直线 MN 的距离为 $d = \frac{|k|}{\sqrt{1+k^2}}$,

$$|MN| = \sqrt{1+k^2} |x_1 - x_2| = \sqrt{1+k^2} \sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2} = \frac{12(1+k^2)}{3+4k^2}$$

$$S = \frac{1}{2} |MN| \cdot d = 6 \sqrt{\frac{k^2(1+k^2)}{(3+4k^2)^2}} \text{10 分}$$

$$\text{令 } u = 3+4k^2 \in (3, +\infty), \text{ 得: } S = 6 \sqrt{\frac{k^2(1+k^2)}{(3+4k^2)^2}} = 6 \sqrt{\frac{u-3}{4} \cdot \frac{u+1}{4} \cdot \frac{1}{u^2}} = \frac{3}{2} \sqrt{-\frac{3}{u^2} - \frac{2}{u} + 1} \in (0, \frac{3}{2})$$

综上所述, $S_{\max} = \frac{3}{2}$12 分

21. 本题考查函数单调性、极值、零点的基础知识, 考查学生运算求解与推理论证的能力, 运用导数工具解决函数与方程、不等式综合问题的能力. 考查数形结合, 分类与整合, 转化与化归的数学思想.

解: (I) 当 $a = 0$ 时, $f(x) = \frac{\ln x + 2}{x} - 2$,

令 $f'(x) = \frac{-\ln x - 1}{x^2} = 0$ 则 $x = \frac{1}{e}$ 1 分

此时 $x \in (0, \frac{1}{e})$, $f'(x) > 0$, $x \in (\frac{1}{e}, +\infty)$, $f'(x) < 0$ 3 分

$\therefore f(x)_{\text{极大}} = f(\frac{1}{e}) = e - 2$, 无极小值4 分

(II) 原式等价于 $\frac{f(x)}{x-1} + \frac{a}{x} > 0$, 即 $\frac{xf(x) + a(x-1)}{x-1} > 0$

$\frac{1}{x-1} [\ln x + a(x^2 - 1) - 2(x-1)] > 0$ 5 分

令 $g(x) = \ln x + a(x^2 - 1) - 2(x-1)$, $g(1) = 0$ 6 分

$g'(x) = \frac{1}{x} + 2ax - 2 = \frac{2ax^2 - 2x + 1}{x}$

因为 $\frac{1}{x-1} [\ln x + a(x^2 - 1) - 2(x-1)] > 0$,

$g(2) = \ln 2 + a(2^2 - 1) - 2(2-1) > 0 \Rightarrow a > \frac{2 - \ln 2}{3} > 0$ 8 分

1 当 $a \geq \frac{1}{2}$ 时, $2ax^2 - 2x + 1 \geq x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2 > 0$

$\therefore g'(x) > 0 \therefore g(x)$ 在 $x \in (0, +\infty)$ 上单调递增

$\therefore x \in (0, 1)$, $g(x) < 0$, $x \in (1, +\infty)$, $g(x) > 0$

$\therefore \frac{1}{x-1} g(x) > 0$ 10 分

② 当 $0 < a < \frac{1}{2}$ 时, 令 $2ax^2 - 2x + 1 = 0$, 得 $x = \frac{1 + \sqrt{1-a}}{2a} > 1$

$\therefore x \in (1, \frac{1 + \sqrt{1-a}}{2a})$ 时, $g'(x) < 0$

即 $g(x)$ 在 $x \in (1, \frac{1 + \sqrt{1-a}}{2a})$ 上单调递减 $\therefore g(1) = 0 \therefore g(x) < 0 \therefore \frac{1}{x-1} g(x) < 0$

综上: $a \geq \frac{1}{2}$ 12 分

法 2: ① 当 $x \geq 1$ 时, $xf(x) > a(1-x)$, $\ln x + 2 + a(1-x)x - 2x > a - ax$

$g(x) = \ln x + ax^2 - 2x + 2 - a > 0$, $x \in (1, +\infty)$ 恒成立

$$g'(x) = \frac{1}{x} + 2ax - 2 = \frac{2ax^2 - 2x + 1}{x}$$

因为 $g(2) = \ln 2 + a(2^2 - 1) - 2(2 - 1) > 0 \Rightarrow a > \frac{2 - \ln 2}{3} > 0$ 8 分

当 $a \geq \frac{1}{2}$ 时, $2ax^2 - 2x + 1 \geq x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2 > 0$

$\therefore g'(x) > 0 \therefore g(x)$ 在 $x \in (0, +\infty)$ 上单调递增, $x \in (1, +\infty), g(x) > 0$ 符合题意.

当 $0 < a < \frac{1}{2}$ 时, 令 $2ax^2 - 2x + 1 = 0$, 得 $x = \frac{1 + \sqrt{1 - a}}{2a} > 1$

$\therefore x \in (1, \frac{1 + \sqrt{1 - a}}{2a})$ 时, $g'(x) < 0$

即 $g(x)$ 在 $x \in (1, \frac{1 + \sqrt{1 - a}}{2a})$ 上单调递减 $\because g(1) = 0 \therefore g(x) < 0$

$\therefore \frac{1}{x-1} g(x) < 0$, 不符合题意舍去.10 分

② 当 $0 < x < 1$ 时, $xf(x) < a(1-x), \ln x + 2 + a(1-x)x - 2x < a - ax$

$g(x) = \ln x + ax^2 - 2x + 2 - a < 0, x \in (0, 1)$ 恒成立

$$g'(x) = \frac{1}{x} + 2ax - 2 = \frac{2ax^2 - 2x + 1}{x}$$

因为 $g(\frac{1}{2}) < 0 \Rightarrow a > \frac{2 - \ln 2}{3} > 0$

当 $a \geq \frac{1}{2}$ 时, $2ax^2 - 2x + 1 \geq x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2 > 0$,

$\therefore g'(x) > 0 \therefore g(x)$ 在 $x \in (0, 1)$ 上单调递增, $x \in (0, 1), g(x) < 0$ 符合题意

当 $0 < a < \frac{1}{2}$ 时, 令 $2ax^2 - 2x + 1 = 0$, 得 $x = \frac{1 + \sqrt{1 - a}}{2a} > 1 \therefore x \in (0, 1)$ 时, $g'(x) < 0$

即 $g(x)$ 在 $x \in (1, \frac{1 + \sqrt{1 - a}}{2a})$ 上单调递减 $\because g(1) = 0 \therefore g(x) > 0$ 不符合题意舍去。

综上: $a \geq \frac{1}{2}$12 分

22. 本题考查学生对直角坐标方程、参数方程、极坐标方程之间的相互转化, 利用直线参数方程 t 的几何意义、直线与圆锥曲线的位置关系确定直线方程、求解弦长问题等相关知识; 考查学生运算求解能力; 考查化归与转化、数形结合的思想.

(I) 解法一: 曲线 C_1 的直角坐标方程为 $x^2 + y^2 - 4x = 0$ (*)2 分

将直线 l 参数方程代入 (*) 得 $t^2 + (2\sqrt{3}\sin\alpha - 2\cos\alpha)t = 0$, 依题 $\Delta = (2\sqrt{3}\sin\alpha - 2\cos\alpha)^2 = 0$

$$\therefore 2\sqrt{3}\sin\alpha - \cos\alpha = 0, \text{ 即 } \tan\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} \text{ 又 } \alpha \in [0, \pi), \therefore \alpha = \frac{\pi}{6} \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

解法二: 曲线 C_1 的直角坐标方程为 $x^2 + y^2 - 4x = 0$ 2 分

其圆心为 $P(2, 0)$, 直线 l 过点 $D(1, \sqrt{3})$ 在曲线 C_1 上. 又 $k_{DC_1} = -\sqrt{3}$, $\therefore k_l = \frac{\sqrt{3}}{3}$

$$\text{又 } \alpha \in [0, \pi) \therefore \alpha = \frac{\pi}{6} \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

解法三: 曲线 C_1 的直角坐标方程为 $x^2 + y^2 - 4x = 0$ 2 分

其圆心为 $P(2, 0)$, 半径 $r = 2$,

直线 l 的普通方程为 $(\tan\alpha)x - y + \sqrt{3} - \tan\alpha = 0$.

$$\text{直线 } l \text{ 与曲线 } C_1 \text{ 相切} \therefore \frac{|2\tan\alpha + \sqrt{3} - \tan\alpha|}{\sqrt{\tan^2\alpha + 1}} = 2$$

两边平方并整理得 $3\tan^2\alpha - 2\sqrt{3}\tan\alpha + 1 = 0$, 即 $(\sqrt{3}\tan\alpha - 1)^2 = 0$

$$\therefore \tan\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3}, \text{ 又 } 0 \leq \alpha < \pi, \therefore \alpha = \frac{\pi}{6} \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

解法四: 曲线 C_1 的直角坐标方程为 $x^2 + y^2 - 4x = 0$ 2 分

直线 l 的普通方程为 $kx - y + \sqrt{3} - k = 0$, 其中 $k = \tan\alpha$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - 4x = 0 \\ kx - y + \sqrt{3} - k = 0 \end{cases} \text{ 消去 } y \text{ 得}$$

$$(1+k^2)x^2 - (2k^2 - 2\sqrt{3}k + 4)x + (\sqrt{3} - k)^2 = 0$$

$$\text{由 } \Delta = 0 \text{ 可解得 } k = \frac{\sqrt{3}}{3}, \text{ 又 } 0 \leq \alpha < \pi, \therefore \alpha = \frac{\pi}{6} \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

(II) 解法一: 设 A, B 两点对应的参数分别为 t_1, t_2

$$\text{由 (I) 得直线 } l \text{ 参数方程为 } \begin{cases} x = 1 + \frac{\sqrt{3}}{2}t \\ y = \sqrt{3} + \frac{1}{2}t \end{cases} \text{ 将其代入曲线 } C_2 \text{ 得 } 5t^2 + 8\sqrt{3}t + 6 = 0 \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$t_1 + t_2 = -\frac{8\sqrt{3}}{5}, t_1 t_2 = \frac{6}{5}$$

$$|AB| = |t_1 - t_2| = \sqrt{(t_1 + t_2)^2 - 4t_1 t_2} = \sqrt{\left(-\frac{8\sqrt{3}}{5}\right)^2 - 4 \times \frac{6}{5}} = \frac{6\sqrt{2}}{5} \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\text{又 } Q(2,0) \text{ 为曲线 } C_1 \text{ 圆心} \therefore S_{\triangle ABQ} = \frac{1}{2}|AB| \cdot r = \frac{1}{2} \times \frac{6\sqrt{2}}{5} \times 2 = \frac{6\sqrt{2}}{5} \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

解法二：由（I）得直线 l 的普通方程为 $x - \sqrt{3}y + 2 = 0$ 6 分

$$\text{设 } A(x_1, y_1), B(x_2, y_2), \begin{cases} x^2 + \frac{y^2}{3} = 1 \\ x - \sqrt{3}y + 2 = 0 \end{cases} \quad \text{消去 } x \text{ 得 } 10y^2 - 12\sqrt{3}y + 9 = 0,$$

$$y_1 + y_2 = \frac{12\sqrt{3}}{10}, y_1 y_2 = \frac{9}{10} \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$|AB| = \sqrt{1 + \left(\frac{1}{k_{AB}}\right)^2} \cdot \sqrt{(y_1 + y_2)^2 - 4y_1 y_2} = \sqrt{4} \times \sqrt{\left(\frac{12\sqrt{3}}{10}\right)^2 - \frac{36}{10}} = \frac{6\sqrt{2}}{5},$$

又 $Q(2,0)$ 为曲线 C_1 圆心,

$$\therefore S_{\triangle ABQ} = \frac{1}{2}|AB| \cdot r = \frac{1}{2} \times \frac{6\sqrt{2}}{5} \times 2 = \frac{6\sqrt{2}}{5} \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

23. 本题考查学生对绝对值不等式的理解和运用相关性质证明不等式等知识；考查学生对绝对值函数的运算求解能力，考查分类与整合等数学思想.

$$(I) \text{ 证明: } f(x) = \left|x + \frac{3}{a}\right| + |x - 2a| = \left|x + \frac{3}{a}\right| + |2a - x| \geq \left|x + \frac{3}{a} + 2a - x\right| \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$= \left|\frac{3}{a} + 2a\right| = \left|\frac{3}{a}\right| + |2a| \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$\geq 2\sqrt{\left|\frac{3}{a}\right| \cdot |2a|} = 2\sqrt{6} \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

$$\text{当且仅当 } a = \frac{\sqrt{6}}{2} \text{ 时取等号} \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$(II) \text{ 由 } f(2) < 5 \text{ 得 } \left|2 + \frac{3}{a}\right| + |2 - 2a| < 5, \text{ 又 } a > 0, \therefore (2a + 3) + a|2 - 2a| < 5a \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$\text{① 当 } 0 < a \leq 1, (2a + 3) + a(2 - 2a) < 5a, \therefore 2a^2 + a - 3 > 0, a < -\frac{3}{2} \text{ 或 } a > 1$$

$$\therefore a \in \emptyset \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\text{② 当 } a > 1 \text{ 时, } (2a + 3) + a(2a - 2) < 5a, \therefore 2a^2 - 5a + 3 < 0 \therefore 1 < a < \frac{3}{2} \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$\text{综上①②, } a \text{ 的取值范围为 } \left\{a \mid 1 < a < \frac{3}{2}\right\} \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$