

数 学(文科)

2019.1

考生注意:

1. 本试卷分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分. 满分 150 分, 考试时间 120 分钟.
2. 考生作答时, 请将答案答在答题卡上. 必须在题号所指示的答题区域作答, 超出答题区域书写的答案无效, 在试题卷、草稿纸上答题无效.

第 I 卷(选择题 共 60 分)

一、选择题: 本大题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一个选项是符合题目要求的.

1. 设复数 $z = \frac{2-i}{1+i}$, 则 $\bar{z} =$ ()
 A. $-\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$ B. $-\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$
 C. $\frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$ D. $\frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$
2. 已知集合 $M = \{x | y = \sqrt{1-x^2}\}$, $N = \{x | 1 < 3^{x+1} < 9, x \in \mathbb{Z}\}$, 则有 ()
 A. $M \subseteq N$ B. $M \cap (\complement_{\mathbb{R}} N) = \{-1, 1\}$
 C. $M \cap N = \{0\}$ D. $M \cup N = \mathbb{Z}$
3. 设命题 $p: \forall x > 0, x > \sin x$; 命题 $q: \exists x > 0, x^2 - (2a+1)x + a^2 + a \leq 0 (a > 0)$, 则下列命题为真命题的是 ()
 A. $(\neg p) \vee (\neg q)$ B. $(\neg p) \wedge q$
 C. $p \wedge (\neg q)$ D. $p \wedge q$
4. 已知 $\vec{e}_1$ 和 $\vec{e}_2$ 是平面内的一组基底, 若向量 $\vec{a} = \lambda \vec{e}_1 + \vec{e}_2$ 与 $\vec{b} = 4\vec{e}_1 + \lambda \vec{e}_2$ 平行, 则 $\lambda =$ ()
 A. -2 或 2 B. -2
 C. 2 D. 0
5. S_n 为等差数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和, $a_3 + a_5 = 2, S_5 = -10$, 则 $S_{10} =$ ()
 A. 45 B. 55
 C. 19 D. 22

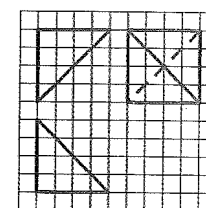
6. 盒中有 2 个白球和 2 个红球, 从中随机无放回地取球, 每次仅取一个球, 第二次才取出白球的概率是 ()
 A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{1}{2}$ C. $\frac{1}{3}$ D. $\frac{2}{3}$

7. 函数 $f(x) = 8\sin x - 15\cos x$ 在 $x = \alpha$ 时取到最大值, 则 $\tan \alpha =$ ()
 A. $-\frac{8}{15}$ B. $-\frac{15}{8}$ C. $\frac{8}{15}$ D. $\frac{15}{8}$

8. 已知圆 $C_1: x^2 + y^2 = 1$ 与圆 $C_2: x^2 + y^2 - 2x + 4y + 1 = 0$ 相交于 A, B 两点, 点 P 为圆 C_2 上的一个动点, 则 $\triangle PAB$ 面积的最大值为 ()
 A. $\frac{8}{5}$ B. $\frac{4+2\sqrt{5}}{5}$
 C. $\frac{8+4\sqrt{5}}{5}$ D. $\frac{8\sqrt{5}}{5}$

9. 如图, 网格纸上小正方形的边长为 1, 粗线画出的是某四面体的三视图, 则该四面体的表面积为 ()

- A. $8(1+2\sqrt{2}+\sqrt{3})$
- B. $8(1+\sqrt{2}+2\sqrt{3})$
- C. $\frac{32}{3}$
- D. $\frac{32}{9}$



10. 已知某正三棱柱 $ABC-A_1B_1C_1$ 外接球的表面积为 $8\sqrt{3}\pi$, 则该三棱柱侧面积的最大值为 ()

- A. 12
- B. 18
- C. 24
- D. 36

11. 已知函数 $f(x) = \cos(\omega x + \varphi)$, $(\omega > 0, |\varphi| < \pi)$, 且相邻两个零点之间的距离为 $\frac{1}{2}$, 若 $f(\frac{1}{3}) = 1$, 则 $f(x)$ ()

- A. 在区间 $[0, \frac{2\pi}{3}]$ 上单调递减
- B. 在区间 $[0, \frac{1}{3}]$ 上单调递减
- C. 在区间 $[\frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{6}]$ 上单调递减
- D. 在区间 $[\frac{1}{3}, \frac{5}{6}]$ 上单调递减

12. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + 2, & (x \geq 0) \\ \left|\frac{1}{x} + 1\right| - b, & (x < 0) \end{cases}$, 若函数 $f(x)$ 的图象与直线 $y = 1$ 有四个交点, 则 $a + b$ 的取值范围

为 ()

- A. $[-2, 0)$
- B. $(-2, 0)$
- C. $(-\infty, -2]$
- D. $(-\infty, -2)$

第Ⅱ卷(非选择题 共90分)

二、填空题:本大题共4小题,每小题5分,共20分.请将答案填写在答题卡相应的位置.

13. 已知函数 $f(x) = mx^2 + x \ln(e^x + 1)$ 为奇函数, $m \in \mathbb{R}$, 则 $m =$ _____.

14. x, y 满足约束条件 $\begin{cases} 3x + y - 1 \leq 0 \\ 3x - y + 1 \geq 0 \\ x - y - 1 \leq 0 \end{cases}$, 则 $|2x + y - 4| + x$ 的最大值为 _____.

15. 已知数列 $\{a_n\}$ 中, $a_1 = 2$, 且满足 $a_{n+1}a_n + a_{n+1} - 2a_n = 0, n \in \mathbb{N}^*$, 则通项公式 $a_n =$ _____.

16. 对称中心在坐标原点, 焦点在坐标轴上, 且过点 $(1, \sqrt{2})$ 的等轴双曲线的顶点与抛物线 $x^2 = 2py (p > 0)$ 的焦点重合, 此抛物线上有两动点 $A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 满足 $(x_1 - 1)(x_2 - 1) + 3 = 0$. 当坐标原点到直线 AB 的距离最大时, 直线 AB 的方程为 _____.

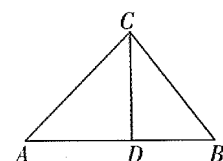
三、解答题:本大题共6小题,共计70分.解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分12分)

已知锐角三角形 $\triangle ABC$ 中, $AB = 12, \cos B = \frac{3}{5}$. AB 边上有一点 $D, AD = CD$, $\triangle ABC$ 的外接圆直径为 13.

(1) 求 $\vec{CA} \cdot \frac{\vec{CB}}{|\vec{CB}|}$ 的值;

(2) 求线段 AD 的长.



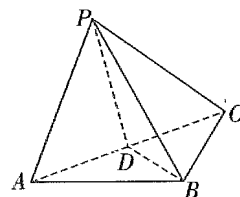
18. (本小题满分12分)

在 $\triangle ABC$ 中, $AB = BC = 1, \angle ABC = \frac{2}{3}\pi$, P 是平面 ABC 外一点, $PA = PB = PC = 2, D$

是 AC 的中点.

(1) 求证: 平面 $PBD \perp$ 平面 PAC ;

(2) 求四面体 $PABC$ 的体积.



19. (本小题满分12分)

在某高中随机调查了 100 名高中生对数学课程的喜欢与否情况, 得到下列 2×2 列联表:

	喜欢数学课程	不喜欢数学课程	合计
男生			60
女生		22	
合计			

已知从该高中的男生中随机抽取 1 人, 抽到喜欢数学课程学生的概率为 $\frac{3}{5}$.

(1) 根据已知条件完成上述 2×2 列联表, 随后从这 100 名高中生中按照“男生”和“女生”的分类标准, 采用分层抽样抽取一个容量为 5 的样本. 记事件 A 为“从这个样本中任选 3 人, 这 3 人中至少有 2 人是男

生”, 求事件 A 发生的概率?

(2) 判断是否有超过 85% 的把握认为“高中生的性别与喜欢数学课程有关”?

$P(K^2 \geq k_0)$	0.4	0.25	0.15	0.10	0.05	0.025	0.010
k_0	0.708	1.323	2.072	2.706	3.841	5.024	6.635

$$\text{附: } K^2 = \frac{n(ad-bc)^2}{(a+b)(c+d)(a+c)(b+d)}$$

20. (本小题满分12分)

过圆 $x^2 + y^2 = 16$ 上的动点 P 作 x 轴的垂线, 垂足为 D , 点 Q 满足 $\vec{PD} = 2\vec{QD}$.

(1) 求点 Q 的轨迹 C 的方程;

(2) 过定点 $F(-2\sqrt{3}, 0)$ 作动直线 OQ (O 为原点) 的平行线交轨迹 C 于 M, N 两点. 证明: $|OQ|^2 = 2|MN|$.

21. (本小题满分12分)

已知函数 $f(x) = \frac{ax^2}{e^x} - 1 (a \neq 0)$.

(1) 设 $F(x) = f(x) - x + \frac{1}{x}$, 求证: 当 $a = 1$ 时, $F(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减;

(2) 若 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上恰有唯一零点, 求 a .

请考生在第 22、23 两题中任选一题作答, 如果多做, 则按所做的第一题记分. 作答时用 2B 铅笔在答题卡上把所选题目的题号涂黑.

22. (本小题满分10分) 选修4-4:坐标系与参数方程

在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x = 2\cos\theta \\ y = \sqrt{3}\sin\theta \end{cases} (\theta \text{ 为参数})$, 在以坐标原点为极点, x 轴正半轴为

极轴的极坐标系中, 曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho^2 + 2\rho\cos\theta - 15 = 0$.

(1) 求曲线 C_1 的普通方程, 曲线 C_2 的直角坐标方程;

(2) 设直线 $l: y = x$ 与曲线 C_2 交于 M, N 两点, 过 $F(-1, 0)$ 作与直线 l 垂直的直线交 C_1 于 P, Q 两点, 求四边形 $MPNQ$ 的面积.

23. (本小题满分10分) 选修4-5:不等式选讲

已知函数 $f(x) = |x - 3| + |2x + 1|$.

(1) 求 $f(x) \leq 10$ 的解集;

(2) 若 $x \in (0, +\infty)$, $x^2 + f(x) \geq ax$ 成立, 求 a 的取值范围.

数学(文科) 参考答案及解析

一、选择题:本大题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分.在每小题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的.

1. 答案:C

解析: $z = \frac{2-i}{1+i} = \frac{(2-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-3i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$, 所以 $\bar{z} = \frac{1}{2} + \frac{3}{2}i$, 故选 C.

2. 答案:C

解析: $M = \{x | y = \sqrt{1-x^2}\} = \{x | 1-x^2 \geq 0\} = \{x | -1 \leq x \leq 1\}$,

$N = \{x | 1 < 3^{x+1} < 9, x \in \mathbf{Z}\} = \{x | -1 < x < 1, x \in \mathbf{Z}\} = \{0\}$, $\therefore M \cap N = \{0\}$, 故选 C.

3. 答案:D

解析:命题 p 为真命题,命题 q 为真命题,所以 $p \wedge q$ 为真命题,故选 D.

4. 答案:A

解析: $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 平行,当且仅当有唯一实数 k ,使 $\vec{b} = k\vec{a}$,即 $4\vec{e}_1 + \lambda\vec{e}_2 = k(\lambda\vec{e}_1 + \vec{e}_2)$,解得 $\lambda = k = \pm 2$,故选 A.

5. 答案:B

解析:设数列 $\{a_n\}$ 的公差为 d ,则 $\begin{cases} 2a_1 + 6d = 2 \\ 5a_1 + \frac{5 \times 4}{2}d = -10 \end{cases}$,解得 $\begin{cases} a_1 = -8 \\ d = 3 \end{cases}$,所以 $S_{10} = 10 \times (-8) + \frac{10 \times 9}{2} \times 3 = 55$,

故选 B.

6. 答案:C

解析:记两个红球为 A_1, A_2 ,两个白球为 B_1, B_2 .只考虑前两次取球,所有的情况有

$(A_1, A_2), (A_1, B_1), (A_1, B_2), (A_2, A_1), (A_2, B_1), (A_2, B_2), (B_1, A_1), (B_1, A_2), (B_1, B_2), (B_2, A_1), (B_2, A_2), (B_2, B_1)$ 共 12 种.其中满足条件的有: $(A_1, B_1), (A_1, B_2), (A_2, B_1), (A_2, B_2)$ 共 4 种.所以第二次才取出白球的概率是 $\frac{4}{12} = \frac{1}{3}$, 故选 C.

7. 答案:A

解析:由题意得: $f(x) = 17\sin(x - \theta)$, 其中 $\cos\theta = \frac{8}{17}, \sin\theta = \frac{15}{17}$, $\therefore$ 函数在 $x = \alpha$ 时取最大值,

$\therefore \alpha - \theta = 2k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbf{Z}), \therefore \alpha = 2k\pi + \frac{\pi}{2} + \theta (k \in \mathbf{Z}), \therefore \sin\alpha = \cos\theta = \frac{8}{17}, \cos\alpha = -\sin\theta = -\frac{15}{17},$

$\therefore \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{8}{15}$, 故选 A.

8. 答案:C

解析:由题可知:两圆公共弦 AB 所在直线方程为: $x - 2y - 1 = 0$,

圆心 C_2 到直线 AB 的距离为: $d = \frac{|1+4-11|}{\sqrt{5}} = \frac{4}{\sqrt{5}}$, 所以弦 AB 长为: $|AB| = 2\sqrt{4-d^2} = \frac{4}{\sqrt{5}}$.

圆 C_2 上的点 P 到直线 AB 距离的最大值为: $d + 2 = 2 + \frac{4}{\sqrt{5}}$,

所以 $S_{\triangle ABP}$ 的面积的最大值为: $S_{\triangle ABP} = \frac{1}{2} \cdot |AB| \cdot (d + 2) = \frac{1}{2} \times \frac{4}{\sqrt{5}} \times (2 + \frac{4}{\sqrt{5}}) = \frac{8+4\sqrt{5}}{5}$, 故选 C.

9. 答案:A

解析:该四面体 $ABCD$ 的直观图如图所示, $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 4 \times 4 = 8, S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} \times 2\sqrt{6} =$

$8\sqrt{3}, S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} \times 4 = 8\sqrt{2}, S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} \times 4 = 8\sqrt{2}$, 所以四面体表面积

$S = 8(1 + 2\sqrt{2} + \sqrt{3})$, 故选 A.

10. 答案:B

解析:设三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 外接球球心为 O , 球心 O 在底面 ABC 上射影为 O' , 底面 $\triangle ABC$ 边长为 m , 三棱

柱高 $AA_1 = n$, 连接 $OO', OA, O'A$, 则: $S_{球} = 4\pi R^2 = 8\sqrt{3}\pi$, $\therefore R^2 = 2\sqrt{3}$

$\therefore O'A = \frac{\sqrt{3}}{3}m, OO' = \frac{1}{2}AA_1 = \frac{n}{2}, OA = R$, 且 $(OO')^2 + (O'A)^2 = OA^2$, $\therefore \frac{n^2}{4} + \frac{m^2}{3} = 2\sqrt{3}$

$\therefore \frac{n^2}{4} + \frac{m^2}{3} = 2\sqrt{3} \geq 2\sqrt{\frac{n^2}{4} \cdot \frac{m^2}{3}} = \frac{mn}{\sqrt{3}}$

$\therefore mn \leq 6$ (当且仅当 $\frac{n^2}{4} = \frac{m^2}{3}$ 即 $n^2 = 4\sqrt{3}, m^2 = 3\sqrt{3}$ 时取等号)

$\therefore$ 三棱柱侧面积最大值为: $(3mn)_{\max} = 18$, 故选 B.

11. 答案:D

解析: $\therefore f(x)$ 相邻两个零点之间的距离为 $\frac{1}{2}$, $\therefore$ 函数的最小正周期为 $T = 1$, $\therefore \omega = 2\pi$, 又 $f(\frac{1}{3}) = 1$, $\therefore$ 函数的

一条对称轴为 $x = \frac{1}{3}$, $\therefore \frac{2\pi}{3} + \varphi = 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$, 又 $|\varphi| < \pi$, $\therefore \varphi = -\frac{2\pi}{3}$, $\therefore f(x) = \cos(2\pi x - \frac{2\pi}{3})$,

当 $2k\pi \leq 2\pi x - \frac{2\pi}{3} \leq 2k\pi + \pi (k \in \mathbf{Z})$ 时, 函数单调递减, 整理可得 $2k + \frac{2}{3} \leq 2x \leq 2k + \frac{5}{3}, k \in \mathbf{Z}$,

即 $x \in [k + \frac{1}{3}, k + \frac{5}{6}]$, $k \in \mathbf{Z}$, 结合选项故选 D.

12. 答案:D

解析:函数 $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + 2, & (x \geq 0) \\ \left| \frac{1}{x} + 1 \right| - b, & (x < 0) \end{cases}$, 且函数 $f(x)$ 的图象与直线 $y = 1$ 有四个交点,

所以函数 $f(x)$ 的图象与直线 $y = 1$ 在 $(-\infty, 0)$ 和 $[0, +\infty)$ 上各有两个交点,

$$\text{则} \begin{cases} -\frac{a}{2} > 0, \\ (-\frac{a}{2})^2 + a \times (-\frac{a}{2}) + 2 < 1, \text{解得: } a < -2, -1 < b < 0, \\ -b < 1 < 1 - b \end{cases}$$

所以 $a+b$ 的取值范围为 $(-\infty, -2)$. 故选 D

二、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 请将答案填写在答题卡相应的位置.

13. 答案: $-\frac{1}{2}$

解析: 定义域 $\mathbf{R}$, 由 $f(-x) + f(x) = 0$, 得: $m(-x)^2 + (-x) \ln(e^{-x} + 1) + mx^2 + x \ln(e^x + 1) = 0$,

$$2mx^2 + x \ln(\frac{e^x + 1}{e^{-x} + 1}) = 0, 2mx^2 + x \ln e^x = 0, 2mx^2 + x^2 = 0, \text{即 } (2m+1)x^2 = 0 \text{ 恒成立, 所以 } m = -\frac{1}{2}.$$

14. 答案: 7

解析: 令 $t = 2x + y - 4$ 知在 $A(-1, -2)$ 处取得最小值 -8 , 在 $B(0, 1)$ 处取得最大值 -3

$$\therefore 2x + y - 4 < 0, \therefore z = |2x + y - 4| + x = -x - y + 4,$$

由题意, 在点 $A(-1, -2)$ 处取得最大值: 7.

15. 答案: $\frac{2^n}{2^n - 1}$

解析: 由题意, 得 $\frac{1}{a_{n+1}} - 1 = \frac{1}{2}(\frac{1}{a_n} - 1)$, $\frac{1}{a_1} - 1 = -\frac{1}{2}$,

所以数列 $\{\frac{1}{a_n} - 1\}$ 以 $-\frac{1}{2}$ 为首项, $\frac{1}{2}$ 为公比的等比数列.

$$\text{所以 } \frac{1}{a_n} - 1 = -\frac{1}{2}(\frac{1}{2})^{n-1} = -(\frac{1}{2})^n, a_n = \frac{2^n}{2^n - 1}.$$

16. 答案: $x + y - 2 = 0$

解析: 由题意等轴双曲线方程为 $y^2 - x^2 = 1$, 抛物线方程为 $x^2 = 4y$

由题意, 设直线 AB 方程: $y = kx + m$, 代入抛物线中化简得: $x^2 - 4kx - 4m = 0$,

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = 4k \\ x_1 x_2 = -4m \end{cases}, \text{代入 } x_1 x_2 - (x_1 + x_2) + 4 = 0 \text{ 中得, } m = 1 - k, \text{直线 } AB \text{ 方程: } y - 1 = k(x - 1). \text{当原点与定}$$

点的连线垂直于直线 AB 时, 坐标原点到直线 AB 的距离最大, 所以直线 AB 方程: $x + y - 2 = 0$

三、解答题: 本大题共 6 小题, 共计 70 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 解析: (1) 在 $\triangle ABC$ 中, $\sin \angle ACB = \frac{AB}{2R} = \frac{12}{13}$, $\cos \angle ACB = \sqrt{1 - \sin^2 \angle ACB} = \frac{5}{13}$ 2 分

$$\sin \angle ABC = \sqrt{1 - \cos^2 \angle ABC} = \frac{4}{5}, CA = 2R \sin \angle ABC = 13 \times \frac{4}{5} = \frac{52}{5} \text{ 4 分}$$

$$\vec{CA} \cdot \frac{\vec{CB}}{|\vec{CB}|} = |\vec{CA}| \cdot \cos \angle ACB = \frac{52}{5} \times \frac{5}{13} = \frac{52}{13} = 4 \text{ 6 分}$$

$$(2) \cos \angle CAB = \cos[\pi - (\angle ABC + \angle ACB)] = -\cos(\angle ABC + \angle ACB) \text{ 8 分}$$

$$= \sin \angle ABC \sin \angle ACB - \cos \angle ABC \cos \angle ACB = \frac{4}{5} \times \frac{12}{13} - \frac{3}{5} \times \frac{5}{13} = \frac{33}{65} \text{ 10 分}$$

$$\therefore \text{在 } \triangle ABC \text{ 中 } AD = CD, \therefore AD = \frac{\frac{1}{2}AC}{\cos A} = \frac{\frac{26}{5}}{\frac{33}{65}} = \frac{338}{33} \text{ 12 分}$$

18. 解析: (1) 在 $\triangle PAC$ 中, $PA = PC$, D 为 AC 中点

$\therefore PD \perp AC$ 同理 $BD \perp AC$ 2 分

$\therefore AC \perp$ 平面 PBD 3 分

$\therefore$ 平面 $PBD \perp$ 平面 PAC 4 分

(2) 设 P 在平面 ABC 内的射影为 O

$$\therefore PA = BP = PC = 2$$

$\therefore OA = OB = OC$, 即 O 为 $\triangle ABC$ 的外心 6 分

$$\text{在 } \triangle ABC \text{ 中, } 2OB = \frac{AC}{\sin \angle ABC} = \frac{\sqrt{3}}{\sin 120^\circ} = 2 \text{ 8 分}$$

$$\therefore OB = 1 \text{ 又 } PB = 2$$

$$\therefore \text{在 } Rt \triangle OPB \text{ 中, } PO = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3} \text{ 10 分}$$

$$\therefore V = \frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 \times 1 \times \sin 120^\circ \times \sqrt{3} = \frac{1}{4} \text{ 12 分}$$

19. 解析: (1) 2×2 列联表为:

	喜欢数学课程	不喜欢数学课程	合计
男生	36	24	60
女生	18	22	40
合计	54	46	100

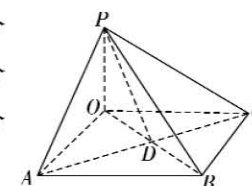
..... 2 分

由条件知, 抽取这个容量为 5 的样本含男生 3 人(记为 a, b, c)、女生 2 人(记为 1, 2), 则从这个样本中任选 3 人的所有情况为: (a, b, c) 、 $(a, b, 1)$ 、 $(a, b, 2)$ 、 $(a, c, 1)$ 、 $(a, c, 2)$ 、 $(a, 1, 2)$ 、 $(b, c, 1)$ 、 $(b, c, 2)$ 、 $(b, 1, 2)$ 、 $(c, 1, 2)$ 共 10 种, 其中事件 A 包含的情况为: (a, b, c) 、 $(a, b, 1)$ 、 $(a, b, 2)$ 、 $(a, c, 1)$ 、 $(a, c, 2)$ 、 $(b, c, 1)$ 、 $(b, c, 2)$ 共 7 种 6 分

$$\text{所以 } P(A) = \frac{7}{10} \text{ 8 分}$$

$$(2) k = \frac{100(36 \times 22 - 18 \times 24)^2}{(36 + 24)(18 + 22)(36 + 18)(24 + 22)} \approx 2.174 > 2.072 \text{ 11 分}$$

查表得, 有超过 85% 的把握认为“高中生的性别与喜欢数学课程有关”. 12 分



20. 解析:(1) 设点 $Q(x, y), P(x_0, y_0)$, 则 $D(x_0, 0), \overrightarrow{PD} = (0, -y_0), \overrightarrow{QD} = (x_0 - x, -y)$

$$\because \overrightarrow{PD} = 2\overrightarrow{QD}, \therefore \begin{cases} 0 = 2(x_0 - x) \\ -y_0 = 2(-y) \end{cases}, \therefore \begin{cases} x_0 = x \\ y_0 = 2y \end{cases} \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

又点 $P(x_0, y_0)$ 在圆 $x^2 + y^2 = 16$ 上, $\therefore x_0^2 + y_0^2 = 16, \therefore x^2 + 4y^2 = 16$

$$\therefore \text{点 } Q \text{ 的轨迹 } C \text{ 的方程为: } \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1 \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

(2) 依题意直线 MN 的斜率不为零, 设 $MN: x = my - 2\sqrt{3}$.

$$\text{由 } \begin{cases} \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1 \\ x = my - 2\sqrt{3} \end{cases} \text{ 得 } (m^2 + 4)y^2 - 4\sqrt{3}my - 4 = 0, \Delta > 0 \text{ 恒成立} \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$\text{设 } M(x_1, y_1), N(x_2, y_2), \text{ 则 } y_1 + y_2 = \frac{4\sqrt{3}m}{m^2 + 4}, y_1 y_2 = \frac{-4}{m^2 + 4}$$

$$|MN| = \sqrt{1 + m^2} |y_1 - y_2| = \sqrt{(1 + m^2)[(y_1 + y_2)^2 - 4y_1 y_2]} = \frac{8(m^2 + 1)}{m^2 + 4} \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$\text{另一方面, } MN \parallel OQ, \text{ 设直线 } OQ \text{ 的方程为 } x = my, \text{ 由 } \frac{x_Q^2}{16} + \frac{y_Q^2}{4} = 1 \text{ 及 } x_Q = my_Q \text{ 得 } y_Q^2 = \frac{16}{4 + m^2}$$

$$\therefore |OQ|^2 = x_Q^2 + y_Q^2 = (1 + m^2)y_Q^2 = \frac{16(1 + m^2)}{4 + m^2}$$

$$\therefore |OQ|^2 = 2|MN|. \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

21. 解析:(1) 当 $a = 1$ 时, $F(x) = f(x) - x + \frac{1}{x} = \frac{x^2}{e^x} - 1 - x + \frac{1}{x}$,

$$F'(x) = \frac{x(2-x)}{e^x} - 1 - \frac{1}{x^2} \dots\dots\dots 1 \text{ 分}$$

当 $x \geq 2$ 时, $F'(x) < 0$ 恒成立. $\dots\dots\dots 2 \text{ 分}$

$$\text{当 } 0 < x < 2 \text{ 时, } x(2-x) \leq \left[\frac{x+(2-x)}{2}\right]^2 = 1, \text{ 从而 } F'(x) \leq \frac{1}{e^x} - 1 - \frac{1}{x^2} < -\frac{1}{x^2} < 0 \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

所以 $F(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上单调递减; $\dots\dots\dots 4 \text{ 分}$

(2) (i) 当 $a < 0$ 时, $f(x) < 0$ 在 $(0, +\infty)$ 上恒成立, 没有零点; $\dots\dots\dots 5 \text{ 分}$

$$(ii) \text{ 当 } a > 0 \text{ 时, } f'(x) = \frac{ax(2-x)}{e^x}$$

当 $x \in (0, 2)$ 时, $f'(x) > 0$; 当 $x \in (2, +\infty)$ 时, $f'(x) < 0$.

所以 $f(x)$ 在 $(0, 2)$ 单调递增, 在 $(2, +\infty)$ 单调递减.

$$\text{故 } f_{\max}(x) = f(2) = \frac{4a}{e^2} - 1 \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

①若 $f(2) = \frac{4a}{e^2} - 1 < 0$, 即 $a < \frac{e^2}{4}$, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上没有零点; $\dots\dots\dots 8 \text{ 分}$

②若 $f(2) = \frac{4a}{e^2} - 1 = 0$, 即 $a = \frac{e^2}{4}$, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上只有一个零点; $\dots\dots\dots 9 \text{ 分}$

③若 $f(2) = \frac{4a}{e^2} - 1 > 0$, 即 $a > \frac{e^2}{4}$, 由于 $f(0) = -1 < 0$, 所以 $f(x)$ 在 $(0, 2)$ 上有一个零点,

$$\text{又 } f(4a) = \frac{16a^3}{e^{4a}} - 1 = \frac{16a^3}{(e^{2a})^2} - 1 < \frac{16a^3}{(2a)^4} - 1 < 0, \text{ 所以 } f(x) \text{ 在 } (2, 4a) \text{ 上有一个零点, } \dots\dots\dots 11 \text{ 分}$$

因此 $a > \frac{e^2}{4}$ 时 $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上有两个零点.

综上, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 只有一个零点时, $a = \frac{e^2}{4}$. $\dots\dots\dots 12 \text{ 分}$

22. 解析:(1) 曲线 C_1 的普通方程 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$, 曲线 C_2 的直角坐标方程 $x^2 + y^2 + 2x - 15 = 0$; $\dots\dots\dots 4 \text{ 分}$

(2) 将直线 l 的极坐标方程 $\theta = \frac{\pi}{4} (\rho \in \mathbf{R})$ 代入曲线 C_2 的极坐标方程得: $\rho^2 + \sqrt{2}\rho - 15 = 0$

$$\text{设 } M, N \text{ 的极径分别是 } \rho_1, \rho_2, \text{ 则 } \begin{cases} \rho_1 \rho_2 = -15 \\ \rho_1 + \rho_2 = -\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\therefore |MN| = |\rho_1 - \rho_2| = \sqrt{(\rho_1 + \rho_2)^2 - 4\rho_1 \rho_2} = \sqrt{62} \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$\text{与 } l \text{ 垂直的直线的参数方程为 } \begin{cases} x = -1 + (-\frac{\sqrt{2}}{2})t \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases} \quad (t \text{ 为参数}) \text{ 代入曲线 } C_1: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$$

化简得: $7t^2 + 6\sqrt{2}t - 18 = 0$, 设 P, Q 对应的参数为 t_1, t_2

$$\text{则 } \begin{cases} t_1 + t_2 = -\frac{6\sqrt{2}}{7} \\ t_1 t_2 = -\frac{18}{7} \end{cases}$$

$$\therefore |PQ| = |t_1 - t_2| = \sqrt{(t_1 + t_2)^2 - 4t_1 t_2} = \frac{24}{7} \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\therefore S_{\triangle MPN} = \frac{1}{2} \cdot |MN| \cdot |PQ| = \frac{12\sqrt{62}}{7}. \dots\dots\dots 10 \text{ 分}$$

23. 解析:(1) 原不等式等价于:

$$\begin{cases} x \geq 3 \\ x - 3 + 2x + 1 \leq 10 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} -\frac{1}{2} \leq x < 3 \\ 3 - x + 2x + 1 \leq 10 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x < -\frac{1}{2} \\ 3 - x - 2x - 1 \leq 10 \end{cases} \dots\dots\dots 3 \text{ 分}$$

$$\text{解得: } 3 \leq x \leq 4 \text{ 或 } -\frac{1}{2} \leq x < 3 \text{ 或 } -\frac{8}{3} \leq x < -\frac{1}{2}$$

$$\therefore \text{原不等式的解集为: } \left\{ x \mid -\frac{8}{3} \leq x \leq 4 \right\} \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$(2) x > 0 \text{ 时, } x^2 + f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x - 2 (x \geq 3) \\ x^2 + x + 4 (0 < x < 3) \end{cases} \dots\dots\dots 7 \text{ 分}$$

$$\text{则 } a \leq \left(\frac{x^2 + f(x)}{x} \right)_{\min}, \therefore \begin{cases} a \leq \frac{16}{3} \\ a \leq 5 \end{cases}, \therefore a \leq 5 \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

综上: a 的取值范围为 $\{a \mid a \leq 5\}$. $\dots\dots\dots 10 \text{ 分}$