

数 学 (理科)

2019.1

考生注意:

1. 本试卷分第 I 卷(选择题)和第 II 卷(非选择题)两部分. 满分 150 分, 考试时间 120 分钟.
2. 考生作答时, 请将答案答在答题卡上. 必须在题号所指示的答题区域作答, 超出答题区域书写的答案无效, 在试题卷、草稿纸上答题无效.

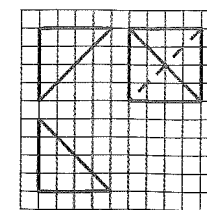
第 I 卷 (选择题 共 60 分)

一、选择题: 本大题共 12 小题, 每小题 5 分, 共 60 分. 在每小题给出的四个选项中, 只有一个选项是符合题目要求的.

1. 在复平面内, 复数 $z = \frac{2-i}{1+i}$ 对应的点位于 ()
A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限
2. 已知集合 $M = \{x | y = \sqrt{1-x^2}\}$, $N = \{x | -2 < \log_{\frac{1}{2}}(x+3) < -1, x \in \mathbb{Z}\}$, 则有 ()
A. $M \subseteq N$ B. $M \cap (\complement_{\mathbb{R}} N) = \{-1, 1\}$
C. $M \cap N = \{0\}$ D. $M \cup N = \mathbb{Z}$
3. 已知函数 $f(x) = \begin{cases} 2^{x-1}, & x \geq 1 \\ x+c, & x < 1 \end{cases}$, 则“ $c=0$ ”是“函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上递增”的 ()
A. 必要不充分条件 B. 充分不必要条件 C. 充要条件 D. 既不充分也不必要条件
4. 4 名同学都有资格参加某三所高校的自主招生考试, 但每人只能报考一所, 其中恰有两人报考同一所高校的概率为 ()
A. $\frac{3}{16}$ B. $\frac{9}{16}$ C. $\frac{4}{9}$ D. $\frac{4}{27}$
5. 在等腰梯形 $ABCD$ 中, $AD \parallel BC$, 且 $BC = 3AD$, F 为 DC 的中点, 则 $\overrightarrow{BF} =$ ()
A. $\frac{5}{8}\overrightarrow{AC} - \frac{7}{8}\overrightarrow{DB}$ B. $\frac{3}{8}\overrightarrow{AC} - \frac{7}{8}\overrightarrow{DB}$
C. $\frac{5}{8}\overrightarrow{AC} - \frac{8}{7}\overrightarrow{DB}$ D. $\frac{3}{8}\overrightarrow{AC} - \frac{8}{7}\overrightarrow{DB}$
6. 函数 $f(x) = 8\sin x - 15\cos x$ 在 $x = \alpha$ 时取到最大值, 则 $\tan \alpha =$ ()
A. $-\frac{8}{15}$ B. $-\frac{15}{8}$ C. $\frac{8}{15}$ D. $\frac{15}{8}$

7. 如图, 网格纸上小正方形的边长为 1, 粗线画出的是某四面体的三视图, 则该四面体的表面积为 ()

- A. $8(1+2\sqrt{2}+\sqrt{3})$
- B. $8(1+\sqrt{2}+2\sqrt{3})$
- C. $\frac{32}{3}$
- D. $\frac{32}{9}$



8. 已知双曲线 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > 0, b > 0)$ 的焦点为 F_1, F_2 , 离心率为 2. 双曲线上横坐标为 $\frac{\sqrt{7}}{2}$ 的点 P 满足 $PF_1 \perp PF_2$, 则双曲线标准方程为 ()

- A. $\frac{x^2}{3} - y^2 = 1$
- B. $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$
- C. $\frac{x^2}{3} - \frac{y^2}{9} = 1$
- D. $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{3} = 1$

9. 已知函数 $f(x) = \log_a(3x-2) + 1 (a > 0 \text{ 且 } a \neq 1)$ 的图象恒过定点 A , 且定点 A 在直线 $sx + ty = 6$ 上, 则二项式 $(x - \frac{s+t}{x})^6$ 的展开式中含 x^2 的项为 ()

- A. $540x^2$
- B. $-540x^2$
- C. -540
- D. 540

10. 已知在正四棱锥 $P-ABCD$ 中, 侧棱与底面所成角为 60° , 且侧面积为 $16\sqrt{7}$, 则四棱锥 $P-ABCD$ 的内切球的表面积为 ()

- A. $\frac{(256-64\sqrt{7})}{3}\pi$
- B. $\frac{(64-16\sqrt{7})}{3}\pi$
- C. $\frac{(32+8\sqrt{7})}{3}\pi$
- D. $\frac{(8+32\sqrt{7})}{3}\pi$

11. 已知函数 $f(x) = \cos(\omega x + \varphi)$, ($\omega > 0, |\varphi| < \pi$), 且相邻两个零点之间的距离为 $\frac{1}{2}$, $f(\frac{1}{3}) = 1$, 若

$f(x_0) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, 则 $|x_0|$ 的最小值为 ()

- A. $\frac{1}{24}$
- B. $\frac{1}{12}$
- C. $\frac{1}{4}$
- D. $\frac{1}{3}$

12. 若 $\forall x \geq 0$ 时, 不等式 $e^x - x - 1 \geq \frac{x^2}{2} + (3a-1)x$ 恒成立, 则实数 a 的取值范围为 ()

- A. $(-\infty, 1)$
- B. $[0, 1)$
- C. $(-\infty, \frac{1}{3}]$
- D. $[\frac{1}{3}, 2]$

第Ⅱ卷 (非选择题 共 90 分)

二、填空题:本大题共 4 小题,每小题 5 分,共 20 分. 请将答案填写在答题卡相应的位置.

13. 已知函数 $f(x) = mx^2 + x \ln(e^x + 1)$ 为奇函数, $m \in \mathbb{R}$, 则 $m =$ _____.

14. x, y 满足约束条件 $\begin{cases} 3x + y - 1 \leq 0 \\ 3x - y + 1 \geq 0 \\ x - y - 1 \leq 0 \end{cases}$, 则 $|2x + y - 4| + x$ 的最大值为 _____.

15. $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 且 $c = 2$, b 是 $b \cos C$ 与 $c \cos B$ 的等差中项, 则 $\triangle ABC$ 面积的最大值为 _____.

16. 过动圆 $C: (x - 2a - 2)^2 + (y - a)^2 = 4 (a \in \mathbb{R})$ 的圆心, 作抛物线 $x^2 = 4y$ 的两条切线, 切点分别为 A, B . 当坐标原点到直线 AB 的距离最大时, 直线 AB 的方程为 _____.

三、解答题:本大题共 6 小题, 共计 70 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

17. (本小题满分 12 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和是 S_n , 且对任意 $n \in \mathbb{N}^*$, 有 $\frac{S_n}{n}$ 是 1 和 a_n 的等差中项.

(1) 求证: $a_3 - 2a_2 + 1 = 0$;

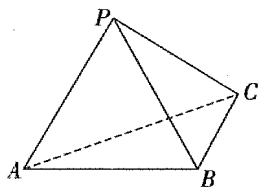
(2) 试判断数列 $\{a_n\}$ 是否为等差数列? 并说明理由.

18. (本小题满分 12 分)

在 $Rt\triangle ABC$ 中, $AB = 2BC$, $\angle ABC = \frac{\pi}{2}$, P 是平面 ABC 外一点, $PA = PB = PC = AB$.

(1) 求证: 平面 $PAC \perp$ 平面 ABC ;

(2) 求二面角 $A - PB - C$ 的余弦值.



19. (本小题满分 12 分)

为响应国家的“低碳环保”号召, 在同一长途线路上, 某客运公司投入 4 辆新能源汽车独立地试运行. 在一次长途运行中, 每辆新能源汽车至多出现 1 次故障, 且出现故障的概率为 $\frac{1}{5}$.

(1) 在一次长途运行中, 有新能源汽车出现故障的概率?

(2) 已知一辆新能源汽车在一次长途运行中不出现故障或出现故障维修好均可收入 1 万元, 出现故障要派 2 名工人配合才能维修好, 且需支付每名工人户外补助 500 元. 一辆新能源汽车出现故障得不到维修, 客运公司收入 0 万元. 现该客运公司有 4 名维修工人, 每名工人在一次长途运行中只能提供 1 次维修, 则该客运公司在一次长途运行中收入的均值为多少万元? (保留两位小数)

20. (本小题满分 12 分)

已知 $A(0, -2), B(0, 2)$ 及椭圆 $C: \frac{y^2}{4} + x^2 = 1$, 动点 P 是椭圆 C 上异于 A, B 的一点. 设 $\triangle ABP$ 的垂心为 Q, O 为原点.

(1) 求 $\triangle ABP$ 的垂心 Q 的轨迹 C_1 的方程;

(2) 过定点 $F(-2\sqrt{3}, 0)$ 作动直线 OQ 的平行线, 交轨迹 C_1 于 M, N 两点, 证明: $|OQ|^2 = 2|MN|$.

21. (本小题满分 12 分)

已知函数 $f(x) = \frac{e^{kx}}{1 + ax}$, ($k, a \in \mathbb{R}, a > 0$).

(1) 当 $k = 1$ 时, 若直线 $y = \frac{e}{4}(x + 1)$ 为曲线 $y = f(x)$ 在 $(1, f(1))$ 处的切线方程, 求证: 当 $x \in (1, +\infty)$ 时,

$$f(x) > \frac{x-1}{\ln x};$$

(2) 当 $x \in (0, \frac{1}{a})$ 时, $(1 - ax)f(x) < 1$, 求 $\frac{k}{a}$ 的取值范围.

请考生在第 22、23 两题中任选一题作答, 如果多做, 则按所做的第一题记分. 作答时用 2B 铅笔在答题卡上把所选题目的题号涂黑.

22. (本小题满分 10 分) 选修 4-4: 坐标系与参数方程

在直角坐标系 xOy 中, 曲线 C_1 的参数方程为 $\begin{cases} x = 2\cos\theta \\ y = \sqrt{3}\sin\theta \end{cases}$ (θ 为参数), 在以坐标原点为极点, x 轴正半轴为

极轴的极坐标系中, 曲线 C_2 的极坐标方程为 $\rho^2 + 2\rho\cos\theta - 15 = 0$.

(1) 求曲线 C_1 的普通方程, 曲线 C_2 的直角坐标方程;

(2) 设直线 $l: y = x$ 与曲线 C_2 交于 M, N 两点, 过 $F(-1, 0)$ 作与直线 l 垂直的直线交 C_1 于 P, Q 两点, 求四边形 $MPNQ$ 的面积.

23. (本小题满分 10 分) 选修 4-5: 不等式选讲

已知函数 $f(x) = |x - 3| + |2x + 1|$.

(1) 求 $f(x) \leq 10$ 的解集;

(2) 若 $x \in (0, +\infty)$, $x^2 + f(x) \geq ax$ 成立, 求 a 的取值范围.

数学(理科) 参考答案及解析

一、选择题:本大题共 12 小题,每小题 5 分,共 60 分.在每小题给出的四个选项中,只有一个选项是符合题目要求的.

1. 答案:D

解析: $z = \frac{2-i}{1+i} = \frac{(2-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-3i}{2} = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}i$,所以复数 $z = \frac{2-i}{1+i}$ 对应的点位于第四象限,故选 D.

2. 答案:C

解析: $M = \{x \mid y = \sqrt{1-x^2}\} = \{x \mid 1-x^2 \geq 0\} = \{x \mid -1 \leq x \leq 1\}$,

$N = \{x \mid 2 < x+3 < 4, x \in \mathbf{Z}\} = \{x \mid -1 < x < 1, x \in \mathbf{Z}\} = \{0\}$, $\therefore M \cap N = \{0\}$,故选 C.

3. 答案:B

解析:当 $c=0$ 时,可得函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上递增,而函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上递增时, c 不一定为 0,故可知“ $c=0$ ”是“函数 $f(x)$ 在 $\mathbf{R}$ 上递增”的充分不必要条件. 故选 B.

4. 答案:C

解析:4 名同学报考三所高校的所有可能情况为: $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$ 种,其中恰有两人报考同一所高校的可能

情况为: $C_4^2 \times A_3^3 = 36$ 种,故所求概率为: $P = \frac{36}{81} = \frac{4}{9}$,故选 C.

5. 答案:B

解析:以 BC 所在直线为 x 轴, BC 垂直平分线为 y 轴建立平面直角坐标系,不妨令 $AD=2$, A 点纵坐标为 t ,则

$BC=6$. $\therefore A(-1, t), C(3, 0), D(1, t), B(-3, 0)$,且 F 为 DC 中点, $\therefore F(2, \frac{t}{2})$

设 $\overrightarrow{BF} = \lambda \overrightarrow{AC} + \mu \overrightarrow{DB}$,则: $(5, \frac{t}{2}) = \lambda(4, -t) + \mu(-4, -t)$, $\therefore (5, \frac{t}{2}) = (4\lambda - 4\mu, -\lambda t - \mu t)$

$\therefore \begin{cases} 4\lambda - 4\mu = 5 \\ -(\lambda + \mu)t = \frac{t}{2} \end{cases}, \therefore \begin{cases} \lambda = \frac{3}{8} \\ \mu = -\frac{7}{8} \end{cases}, \therefore \overrightarrow{BF} = \frac{3}{8}\overrightarrow{AC} - \frac{7}{8}\overrightarrow{DB}$,故选 B.

6. 答案:A

解析:由题意得: $f(x) = 17\sin(x-\theta)$,其中 $\cos\theta = \frac{8}{17}, \sin\theta = \frac{15}{17}$, $\therefore$ 函数在 $x=\alpha$ 时取最大值,

$\therefore \alpha - \theta = 2k\pi + \frac{\pi}{2} (k \in \mathbf{Z}), \therefore \alpha = 2k\pi + \frac{\pi}{2} + \theta (k \in \mathbf{Z}), \therefore \sin\alpha = \cos\theta = \frac{8}{17}, \cos\alpha = -\sin\theta = -\frac{15}{17},$

$\therefore \tan\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = -\frac{8}{15}$,故选 A.

7. 答案:A

解析:该四面体 $ABCD$ 的直观图如图所示, $S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} \times 4 \times 4 = 8, S_{\triangle ABD} = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} \times 2\sqrt{6} =$

$8\sqrt{3}, S_{\triangle BCD} = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} \times 4 = 8\sqrt{2}, S_{\triangle ACD} = \frac{1}{2} \times 4\sqrt{2} \times 4 = 8\sqrt{2},$

所以四面体表面积 $S = 8(1 + 2\sqrt{2} + \sqrt{3})$,故选 A.

8. 答案:B

解析:设 $P(\frac{\sqrt{7}}{2}, y_0)$. 由离心率 $\frac{c}{a} = 2$,得 $b = \sqrt{3}a$. 将 $x = \frac{\sqrt{7}}{2}$ 代入双曲线方程 $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{3a^2} = 1$ 得 $y_0^2 = \frac{21-12a^2}{4}$.

所以 $|OP| = \sqrt{7-3a^2}$. 因为 $PF_1 \perp PF_2$,在 $Rt\triangle PF_1F_2$ 中, $|OP| = \frac{1}{2}|F_1F_2| = c$,即 $\sqrt{7-3a^2} = c$,

解得 $a=1, b=\sqrt{3}$. 所以双曲线标准方程为 $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$,故选 B.

9. 答案:A

解析:当 $x=1$ 时 $f(1)=1$,所以函数 $f(x)$ 的图象恒过定点 $A(1,1)$, $\therefore$ 点 $A(1,1)$ 在直线 $sx+ty=6$ 上, $\therefore s+t=6$,

$\therefore (x - \frac{s+t}{x})^6 = (x - \frac{6}{x})^6$,由 $T_{r+1} = C_6^r \cdot x^{6-r} \cdot (-\frac{6}{x})^r = C_6^r \cdot (-6)^r \cdot x^{6-2r}, (r=0,1,2,\dots,6)$,得:当 $r=2$ 时,

含 x^2 的项为: $C_6^2 \cdot (-6)^2 \cdot x^2 = 540x^2$,故选 A.

10. 答案:B

解析:由正四棱锥 $P-ABCD$ 的顶点 P 向底面 $ABCD$ 引垂线 PO' ,垂足为 O' ,过 PO' 及棱 AD, BC 的中点 M, N 作正四棱锥 $P-ABCD$ 的轴截面 PMN .

设底面正方形 $ABCD$ 边长为 $2a$,正四棱锥 $P-ABCD$ 内切球半径为 r ,则由侧棱与底面所成角为 60° 知

$\angle PAO' = 60^\circ$,所以 $PO' = AO' \cdot \tan 60^\circ = \sqrt{2}a \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}a, PM = \sqrt{(PO')^2 + (MO')^2} = \sqrt{7}a$

则由此正四棱锥侧面积为 $16\sqrt{7}$ 得, $4 \times \frac{1}{2} \times 2a \times \sqrt{7}a = 16\sqrt{7}$,解得 $a=2$.

由正四棱锥与球的对称性知该正四棱锥的内切球半径与 $\triangle PMN$ 内切圆的半径相等,

故 $\frac{1}{2} \times 4 \times 2\sqrt{6} = \frac{1}{2} \times (2\sqrt{7} + 2\sqrt{7} + 4) \times r$,解得 $r = \frac{\sqrt{6}(\sqrt{7}-1)}{3}$,

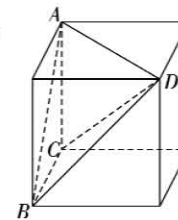
所以正四棱锥 $P-ABCD$ 的内切球的表面积为 $S = 4\pi r^2 = \frac{(64-16\sqrt{7})}{3}\pi$,故选 B.

11. 答案:B

解析: $\therefore f(x)$ 相邻两个零点之间的距离为 $\frac{1}{2}$, $\therefore$ 函数的最小正周期为 $T=1$, $\therefore \omega = 2\pi$,又 $f(\frac{1}{3}) = 1$, $\therefore$ 函数的

一条对称轴为 $x = \frac{1}{3}$, $\therefore \frac{2\pi}{3} + \varphi = 2k\pi, k \in \mathbf{Z}$,又 $|\varphi| < \pi$, $\therefore \varphi = -\frac{2\pi}{3}$, $\therefore f(x) = \cos(2\pi x - \frac{2\pi}{3})$,

由 $f(x_0) = \cos(2\pi x_0 - \frac{2\pi}{3}) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ 得: $2\pi x_0 - \frac{2\pi}{3} = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi$ 或 $-\frac{5\pi}{6} + 2k\pi, (k \in \mathbf{Z})$,



解得: $x_0 = \frac{3}{4} + k$ 或 $-\frac{1}{12} + k, (k \in \mathbf{Z})$, 所以 $|x_0|$ 的最小值为 $\frac{1}{12}$, 故选 B.

12. 答案: C

解析: 由 $e^x - x - 1 \geq \frac{x^2}{2} + (3a - 1)x$ 得: $e^x - \frac{x^2}{2} - 3ax - 1 \geq 0$ 在 $[0, +\infty)$ 上恒成立.

令 $f(x) = e^x - \frac{x^2}{2} - 3ax - 1 (x \geq 0)$, 则 $f'(x) = e^x - x - 3a$, 令 $g(x) = e^x - x - 3a (x \geq 0)$, 则 $g'(x) = e^x - 1 \geq 0$,

$\therefore f'(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增, 从而 $f'(x) \geq f'(0) = 1 - 3a$, 当 $a \leq \frac{1}{3}$ 时, $f'(x) \geq f'(0) = 1 - 3a \geq 0$,

$\therefore f(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增, $\therefore f(x) \geq f(0) = 0$ 恒成立

当 $a > \frac{1}{3}$ 时, $f'(\ln(3a)) = e^{\ln(3a)} - \ln(3a) - 3a = -\ln(3a) < 0$, 则 $f(x)$ 在 $(0, \ln(3a))$ 上单调递减,

$\therefore$ 当 $0 < x < \ln(3a)$ 时, $f(x) < f(0) = 0$, 不符合题意, 所以实数 a 的取值范围是 $(-\infty, \frac{1}{3}]$, 故选 C

二、填空题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分. 请将答案填写在答题卡相应的位置.

13. 答案: $-\frac{1}{2}$

解析: 定义域 $\mathbf{R}$, 由 $f(-x) + f(x) = 0$, 得: $m(-x)^2 + (-x)\ln(e^{-x} + 1) + mx^2 + x\ln(e^x + 1) = 0$,

$2mx^2 + x\ln(\frac{e^x + 1}{e^{-x} + 1}) = 0, 2mx^2 + x\ln e^x = 0, 2mx^2 + x^2 = 0$, 即 $(2m + 1)x^2 = 0$ 恒成立, 所以 $m = -\frac{1}{2}$.

14. 答案: 7

解析: 令 $t = 2x + y - 4$ 知在 $A(-1, -2)$ 处取得最小值 -8, 在 $B(0, 1)$ 处取得最大值 -3

$\therefore 2x + y - 4 < 0, \therefore z = |2x + y - 4| + x = -x - y + 4$,

由题意, 在点 $A(-1, -2)$ 处取得最大值: 7.

15. 答案: $\frac{4}{3}$

解析: 由正弦定理得 $\sin B \cos C + \sin C \cos B = 2 \sin B$, 即 $\sin(B + C) = \sin A = 2 \sin B$ 化简得 $a = 2b$. (或由余弦定理

得, $b \cdot \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} + c \cdot \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac} = 2b$, 化简得 $a = 2b$.)

以直线 AB 为 x 轴, 线段 AB 的中垂线为 y 轴, 建立直角坐标系, $B(-1, 0), A(1, 0), C(x, y)$

由 $BC = 2AC$, 得 $\sqrt{(x+1)^2 + y^2} = 2\sqrt{(x-1)^2 + y^2}$, 化简得 $(x - \frac{5}{3})^2 + y^2 = \frac{16}{9} (y \neq 0)$,

所以 $\triangle ABC$ 面积最大值为 $\frac{1}{2} \times 2 \times \frac{4}{3} = \frac{4}{3}$.

16. 答案: $x + y - 2 = 0$

解析: 设圆心 $C(2a + 2, a), A(x_1, y_1), B(x_2, y_2)$, 因为直线 $CA: x_1 x = 2(y + y_1)$, 直线 $CB: x_2 x = 2(y + y_2)$, 把圆

心 C 代入得 $\begin{cases} x_1(2a + 2) = 2a + 2y_1 \\ x_2(2a + 2) = 2a + 2y_2 \end{cases}$

所以 $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ 为方程 $x(2a + 2) = 2a + 2y$ 的两组解, 所以直线 AB 方程为 $x(2a + 2) = 2a + 2y$,

所以直线 AB 过定点 $(1, 1)$, 当原点与定点的连线垂直于直线 AB 时, 坐标原点到直线 AB 的距离最大,

所以直线 AB 方程: $x + y - 2 = 0$.

三、解答题: 本大题共 6 小题, 共计 70 分. 解答应写出必要的文字说明、证明过程或演算步骤.

17. 解析: (1) 依题意有 $2 \frac{S_n}{n} = 1 + a_n, n \in \mathbf{N}^*$ 2 分

$2S_2 = 2 + 2a_2, 2S_3 = 3 + 3a_3$ 4 分

$2(S_3 - S_2) = 1 + 3a_3 - 2a_2$,

$a_3 - 2a_2 + 1 = 0$ 6 分

(2) 由 $2 \frac{S_n}{n} = 1 + a_n, n \in \mathbf{N}^*$,

得 $2S_n = n + na_n, 2S_{n+1} = n + 1 + (n + 1)a_{n+1}$ 8 分

$2(S_{n+1} - S_n) = 1 + (n + 1)a_{n+1} - na_n$, 即 $(n - 1)a_{n+1} - na_n + 1 = 0$,

$na_{n+2} - (n + 1)a_{n+1} + 1 = 0$ 10 分

$na_{n+2} + na_n - 2na_{n+1} = 0, a_{n+2} + a_n = 2a_{n+1}, n \in \mathbf{N}^*$,

所以 $\{a_n\}$ 是等差数列. 12 分

18. 解析: (1) 设 O 为 AC 中点, 连结 PO, OB , 在 $\triangle PAC$ 中

$\therefore PA = PC, O$ 为 AC 中点, $\therefore PO \perp AC, \therefore \angle POA = \frac{\pi}{2}$ 1 分

在 $Rt\triangle ABC$ 中, $OB = \frac{1}{2}AC = OA$, 又 $PB = PA, PO = PO$

$\therefore \triangle PAO \cong \triangle PBO, \therefore \angle POB = \angle POA = \frac{\pi}{2}$ 3 分

$\therefore PO \perp OB, \therefore PO \perp$ 平面 ABC 5 分

又 $PO \subset$ 平面 $PAC, \therefore$ 平面 $PAC \perp$ 平面 ABC 6 分

(2) 设 D, E 分别为 AB, BC 中点, 易得 OD, OE, OP 两两垂直, 建立如图空间直角坐标系. 不妨设 $BC = 1$

..... 7 分

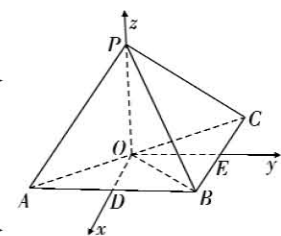
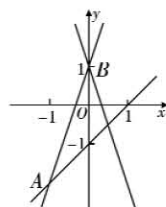
则 $AB = PA = PB = PC = 2, \therefore A(\frac{1}{2}, -1, 0), B(\frac{1}{2}, 1, 0), C(-\frac{1}{2}, 1, 0), P(0, 0, \frac{\sqrt{11}}{2})$ 9 分

设平面 PAB 法向量为 $\vec{n}_1 = (a, b, c)$

由 $\begin{cases} \vec{n}_1 \cdot \vec{AB} = 0 \\ \vec{n}_1 \cdot \vec{AP} = 0 \end{cases}$, 解得 $\vec{n}_1 = (\sqrt{11}, 0, 1)$

同理平面 PBC 的法向量 $\vec{n}_2 = (0, \sqrt{11}, 2)$ 11 分

$\therefore \cos \langle \vec{n}_1, \vec{n}_2 \rangle = \frac{2}{\sqrt{12} \times \sqrt{15}} = \frac{\sqrt{5}}{15}$



∴ 二面角 $A-PB-C$ 的余弦值为 $-\frac{\sqrt{5}}{15}$ 12 分

19. 解析: (1) 设在一次长途运行中, 每辆新能源汽车出现故障次数为 X , 则 X 的分布列为

X	1	0
P	$\frac{1}{5}$	$\frac{4}{5}$

所以, 在一次长途运行中, 恰有 k 辆新能源汽车出现故障的概率

$$P_4(k) = C_4^k \left(\frac{1}{5}\right)^k \left(\frac{4}{5}\right)^{4-k} (k=0, 1, 2, 3, 4) \quad \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

记事件 $A =$ “在一次长途运行中, 有新能源汽车出现故障”, 则有

$$P(A) = P_4(1) + P_4(2) + P_4(3) + P_4(4) = 1 - P_4(0) = 1 - C_4^0 \left(\frac{1}{5}\right)^0 \left(\frac{4}{5}\right)^4 = \frac{369}{625} \quad \dots\dots\dots 4 \text{ 分}$$

(2) 设该客运公司在一次长途运行中收入 Y 万元, 则

当有 0 辆新能源汽车出现故障时, $Y = 4 \times 1 = 4$

当有 1 辆新能源汽车出现故障时, $Y = 4 \times 1 - 2 \times 0.05 = 3.9$

当有 2 辆新能源汽车出现故障时, $Y = 4 \times 1 - 4 \times 0.05 = 3.8$

当有 3 辆新能源汽车出现故障时, $Y = 3 \times 1 - 4 \times 0.05 = 2.8$

当有 4 辆新能源汽车出现故障时, $Y = 2 \times 1 - 4 \times 0.05 = 1.8$ 6 分

其分布列为

Y	4	3.9	3.8	2.8	1.8
P	$C_4^0 \left(\frac{1}{5}\right)^0 \left(\frac{4}{5}\right)^4$	$C_4^1 \left(\frac{1}{5}\right)^1 \left(\frac{4}{5}\right)^3$	$C_4^2 \left(\frac{1}{5}\right)^2 \left(\frac{4}{5}\right)^2$	$C_4^3 \left(\frac{1}{5}\right)^3 \left(\frac{4}{5}\right)^1$	$C_4^4 \left(\frac{1}{5}\right)^4 \left(\frac{4}{5}\right)^0$

即

Y	4	3.9	3.8	2.8	1.8
P	$\frac{256}{625}$	$\frac{256}{625}$	$\frac{96}{625}$	$\frac{16}{625}$	$\frac{1}{625}$

..... 10 分

$$\text{所以 } E(Y) = 4 \times \frac{256}{625} + 3.9 \times \frac{256}{625} + 3.8 \times \frac{96}{625} + 2.8 \times \frac{16}{625} + 1.8 \times \frac{1}{625} \approx 3.89 \text{ (万元)}. \quad \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

20. 解析: (1) 设点 $Q(x, y)$, $P(x_0, y_0)$ ($x_0 \neq 0$), 又 $A(0, -2)$, $B(0, 2)$, 则

$$\overrightarrow{AB} = (0, 4), \overrightarrow{PQ} = (x - x_0, y - y_0); \overrightarrow{AP} = (x_0, y_0 + 2), \overrightarrow{BQ} = (x, y - 2)$$

$$\because AB \perp PQ, \therefore \overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{PQ} = 0,$$

$$\therefore y = y_0 \quad \dots\dots\dots 2 \text{ 分}$$

$$\because AP \perp BQ, \therefore \overrightarrow{AP} \cdot \overrightarrow{BQ} = 0, x_0 x + (y_0 + 2)(y - 2) = 0, \text{ 又 } y = y_0$$

$$\therefore x_0 x + y_0^2 - 4 = 0, \text{ 又 } \frac{y_0^2}{4} + x_0^2 = 1, \therefore x_0 x - 4x_0^2 = 0, \text{ 又 } x_0 \neq 0$$

$$\therefore \begin{cases} x = 4x_0 \\ x_0 \neq 0 \end{cases} \quad \text{②} \quad \dots\dots\dots 5 \text{ 分}$$

$$\text{将①, ②代入 } \frac{y_0^2}{4} + x_0^2 = 1 \text{ 中, 整理得 } \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1 (x \neq 0) \quad \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

(2) 依题意直线 MN 的斜率存在且不为零, 设 $MN: x = my - 2\sqrt{3}$ 7 分

$$\text{由 } \begin{cases} \frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1 \\ x = my - 2\sqrt{3} \end{cases} \text{ 得 } (m^2 + 4)y^2 - 4\sqrt{3}my - 4 = 0, \Delta > 0 \text{ 恒成立.} \quad \dots\dots\dots 8 \text{ 分}$$

$$\text{设 } M(x_1, y_1), N(x_2, y_2), \text{ 则 } y_1 + y_2 = \frac{4\sqrt{3}m}{m^2 + 4}, y_1 y_2 = \frac{-4}{m^2 + 4}$$

$$|MN| = \sqrt{1 + m^2} |y_1 - y_2| = \sqrt{(1 + m^2)[(y_1 + y_2)^2 - 4y_1 y_2]} = \frac{8(m^2 + 1)}{m^2 + 4} \quad \dots\dots\dots 9 \text{ 分}$$

$$\text{另一方面, } MN \parallel OQ, \text{ 设直线 } OQ \text{ 的方程为 } x = my, \text{ 由 } \frac{x_Q^2}{16} + \frac{y_Q^2}{4} = 1 \text{ 及 } x_Q = my_Q \text{ 得 } y_Q^2 = \frac{16}{4 + m^2}$$

$$\therefore |OQ|^2 = x_Q^2 + y_Q^2 = (1 + m^2)y_Q^2 = \frac{16(1 + m^2)}{4 + m^2}$$

$$\therefore |OQ|^2 = 2|MN|. \quad \dots\dots\dots 12 \text{ 分}$$

21. 解析: (1) 当 $k = 1$ 时, $f(x) = \frac{e^x}{1 + ax}$

又直线 $y = \frac{e}{4}(x + 1)$ 为曲线 $y = f(x)$ 在 $(1, f(1))$ 处的切线方程可解得 $a = 1$, 经检验符合. 2 分

$$\text{下面即证: } \frac{e^x}{1 + x} > \frac{x - 1}{\ln x}$$

$$\text{法 1: 设 } F(x) = e^x \ln x - x^2 + 1, \text{ 则 } F'(x) = e^x \left(\ln x + \frac{1}{x}\right) - 2x$$

$$\text{设函数 } G(x) = F'(x), \text{ 则 } G'(x) = e^x \left(\ln x + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}\right) - 2$$

$$\text{设函数 } H(x) = G'(x), H'(x) = e^x \left(\ln x + \frac{3}{x} - \frac{3}{x^2} + \frac{2}{x^3}\right) = e^x \left(\ln x + \frac{3x - 3}{x^2} + \frac{2}{x^3}\right) > 0$$

所以 $H(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上为增函数, 又 $H(1) = e - 2 > 0$,

所以 $G(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上为增函数 4 分

又 $G(1) = e - 2 > 0$, 故可得 $F(x) = e^x \ln x - x^2 + 1$ 在 $(1, +\infty)$ 上为增函数

$$\text{又 } F(1) = 0, F(x) = e^x \ln x - x^2 + 1 > F(1) = 0, \text{ 所以 } \frac{e^x}{1 + x} > \frac{x - 1}{\ln x} \quad \dots\dots\dots 6 \text{ 分}$$

$$\text{法 2: 当 } k = 1 \text{ 时, } f(x) = \frac{e^x}{1 + ax}$$

又直线 $y = \frac{e}{4}(x+1)$ 为曲线 $y=f(x)$ 在 $(1, f(1))$ 处的切线方程可解得 $a=1$, 经检验符合.

..... 2 分

$$\text{设 } F(x) = \ln x - \frac{x^2-1}{e^x}, \text{ 则 } F'(x) = \frac{1}{x} + \frac{x^2-2x-1}{e^x} = \frac{e^x + x^3 - 2x^2 - x}{xe^x}$$

$$\text{设 } G(x) = e^x + x^3 - 2x^2 - x, \text{ 则 } G'(x) = e^x + 3x^2 - 4x - 1,$$

设 $H(x) = G'(x)$, 则 $H'(x) = e^x + 6x - 4$, 又 $H'(x) = e^x + 6x - 4$ 在 $(1, +\infty)$ 上为增函数,

所以 $H'(x) > H'(1) = e + 2 > 0$, 所以 $H(x) = G'(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上为增函数. 4 分

又 $H(1) > 0$, 则 $H(x) > H(1) = e - 2 > 0$, 即 $G'(x) > 0$, 所以 $G(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上为增函数.

又 $G(x) > G(1) = e - 2 > 0$ 所以 $F(x)$ 为增函数, 所以 $F(x) > 0$ 在 $(1, +\infty)$ 上恒成立, 故原命题得证. 6 分

(2) 当 $x \in (0, \frac{1}{a})$ 时, $1+ax > 0$ 且 $1-ax > 0$, 所以由 $(1-ax)f(x) < 1$ 可得 $e^{kx} < \frac{1+ax}{1-ax}$.

令 $t = ax, t \in (0, 1), \lambda = \frac{k}{a}$, 则上式转化为 $e^{\lambda t} < \frac{1+t}{1-t}$

即等价于当 $t \in (0, 1)$ 时, $\ln \frac{1+t}{1-t} > \lambda t$ 恒成立. 7 分

$$\text{设 } g(t) = \ln(1+t) - \ln(1-t) - \lambda t, t \in (0, 1), g'(t) = \frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t} - \lambda = \frac{2}{1-t^2} - \lambda$$

$$\text{①当 } \lambda \leq 2 \text{ 时, } g'(t) \geq \frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t} - 2 = \frac{2t^2}{1-t^2} > 0,$$

故函数 $g(t)$ 在 $t \in (0, 1)$ 单调递增, 又 $g(0) = 0$, 所以 $g(t) > 0$ 恒成立. 即 $\ln \frac{1+t}{1-t} > \lambda t$ 成立.

..... 9 分

②当 $\lambda > 2$ 时, 不符合题意, 理由如下:

注意到 $\ln(t+1) < t$, 所以 $g(t) < t - \ln(1-t) - \lambda t$.

$$\text{设 } G(t) = (1-\lambda)t - \ln(1-t), t \in (0, 1), G'(t) = (1-\lambda) + \frac{1}{1-t} = \frac{(\lambda-1)t - (\lambda-2)}{1-t}$$

$$\text{令 } G'(t) = 0, \text{ 解得 } t_0 = \frac{\lambda-2}{\lambda-1} \in (0, 1). \text{ 10 分}$$

故当 $t \in (0, t_0)$ 时, $G'(t) < 0, G(t)$ 单调递减; 当 $t \in (t_0, 1)$ 时, $G'(t) > 0, G(t)$ 单调递增;

所以在 $t \in (0, t_0)$ 时, $G(t) < G(0) = 0$,

即存在 $t_0 = \frac{\lambda-2}{\lambda-1} \in (0, 1)$, 使得 $\ln \frac{1+t}{1-t} \leq \lambda t$, 故 $\lambda > 2$ 不符合题意.

综上所述, $\frac{k}{a}$ 的取值范围是 $(-\infty, 2]$ 12 分

22. 解析: (1) 曲线 C_1 的普通方程 $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$, 曲线 C_2 的直角坐标方程 $x^2 + y^2 + 2x - 15 = 0$; 4 分

(2) 将直线 l 的极坐标方程 $\theta = \frac{\pi}{4} (\rho \in \mathbf{R})$ 代入曲线 C_2 的极坐标方程得: $\rho^2 + \sqrt{2}\rho - 15 = 0$

$$\text{设 } M, N \text{ 的极径分别是 } \rho_1, \rho_2, \text{ 则 } \begin{cases} \rho_1 \rho_2 = -15 \\ \rho_1 + \rho_2 = -\sqrt{2} \end{cases}$$

$$\therefore |MN| = |\rho_1 - \rho_2| = \sqrt{(\rho_1 + \rho_2)^2 - 4\rho_1 \rho_2} = \sqrt{62} \text{ 6 分}$$

$$\text{与 } l \text{ 垂直的直线的参数方程为 } \begin{cases} x = -1 + (-\frac{\sqrt{2}}{2})t \\ y = \frac{\sqrt{2}}{2}t \end{cases} \quad (t \text{ 为参数}) \text{ 代入曲线 } C_1: \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$$

化简得: $7t^2 + 6\sqrt{2}t - 18 = 0$, 设 P, Q 对应的参数为 t_1, t_2

$$\text{则 } \begin{cases} t_1 + t_2 = -\frac{6\sqrt{2}}{7} \\ t_1 t_2 = -\frac{18}{7} \end{cases}$$

$$\therefore |PQ| = |t_1 - t_2| = \sqrt{(t_1 + t_2)^2 - 4t_1 t_2} = \frac{24}{7} \text{ 8 分}$$

$$\therefore S_{\triangle MPNQ} = \frac{1}{2} \cdot |MN| \cdot |PQ| = \frac{12\sqrt{62}}{7} \text{ 10 分}$$

23. 解析: (1) 原不等式等价于:

$$\begin{cases} x \geq 3 \\ x - 3 + 2x + 1 \leq 10 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} -\frac{1}{2} \leq x < 3 \\ 3 - x + 2x + 1 \leq 10 \end{cases} \text{ 或 } \begin{cases} x < -\frac{1}{2} \\ 3 - x - 2x - 1 \leq 10 \end{cases} \text{ 3 分}$$

$$\text{解得: } 3 \leq x \leq 4 \text{ 或 } -\frac{1}{2} \leq x < 3 \text{ 或 } -\frac{8}{3} \leq x < -\frac{1}{2}$$

$$\therefore \text{原不等式的解集为: } \left\{ x \mid -\frac{8}{3} \leq x \leq 4 \right\} \text{ 5 分}$$

$$(2) x > 0 \text{ 时, } x^2 + f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x - 2 (x \geq 3) \\ x^2 + x + 4 (0 < x < 3) \end{cases} \text{ 7 分}$$

$$\text{则 } a \leq \left(\frac{x^2 + f(x)}{x} \right)_{\min}, \therefore \begin{cases} a \leq \frac{16}{3} \\ a \leq 5 \end{cases}, \therefore a \leq 5 \text{ 9 分}$$

综上: a 的取值范围为 $\{a \mid a \leq 5\}$ 10 分