2013 年考研数学三全真模拟题（二）

来源：高学网教学研发中心

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分. 下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

（1）已知当 $x\to 0$ 时 $f(x)=\tan x-\ln(1+\sin x)$ 与 kx^n 是等价无穷小量，则

（A）$k=-\frac{1}{2},n=2.$　　（B）$k=\frac{1}{2},n=2.$

（C）$k=-\frac{1}{2},n=3.$　　（D）$k=\frac{1}{2},n=3.$

（2）设级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 条件收敛，$a_n=\frac{1}{2}\left(|u_n|+u_n\right)$，$b_n=\frac{1}{2}\left(|u_n|-u_n\right),n=1,2,3...,$ 则

（A）级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n,\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 都发散.　　（B）级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n,\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 都收敛.

（C）级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散.　　（D）级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散，$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛

（3）设 C_1,C_2 是两个任意常数，则方程 $y=C_1e^{2x}+C_2e^{-x}-2xe^{-x}$ 满足的一个微分方程是

（A）$y''+y'-2y=6e^{-x}$.　　（B）$y''-y'-2y=6e^{-x}$.

（C）$y''+y'-2y=3xe^{-x}$.　　（D）$y''-y'-2y=3xe^{-x}$.

（4）设 $z=z(x,y)$ 由方程 $y+z=xf(y^2-z^2)$ 确定，且 f 可微，则 $x\frac{\partial z}{\partial x}+z\frac{\partial z}{\partial y}$ 等于

（A）x.　　（B）y.　　（C）z.　　（D）1.

（5）已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5$ 线性无关，则 $\mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4+\boldsymbol{\alpha}_5)$ 等于

（A）1.　　（B）2.　　（C）3.　　（D）4.

（6）设 $\boldsymbol{A}$ 为 4 阶实对称矩阵，且 $\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}=\boldsymbol{0}$. 若 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=1$，则二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 在正交变换下的标准形是

（A）$y_1^2+y_2^2+y_3^2-3y_4^2$.　　（B）$y_1^2-3y_2^2-3y_3^2-3y_4^2$.

（C）$y_1^2+y_2^2-3y_3^2-3y_4^2$.　　（D）$y_1^2+y_2^2+y_3^2-y_4^2$.

（7）设二维随机变量 (X_1,X_2) 的密度函数为 $f(x_1,x_2)$，则随机变量 (Y_1,Y_2)（其中 $Y_1=2X_1,Y_2=\frac{1}{3}X_2$）的概率密度 $f_1(y_1,y_2)$ 等于

（A）$f(\frac{y_1}{2},3y_2)$.　　（B）$\frac{3}{2}f(\frac{y_1}{2},3y_2)$.

（C）$f(2y_1,\frac{y_2}{3})$.　　（D）$\frac{2}{3}f(2y_1,\frac{y_2}{3})$.

（8）设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)$，已知 $F(0)=\frac{1}{8}$，且其概率密度 $f(x)=af_1(x)+bf_2(x)$，其中 $f_1(x),f_2(x)$ 分别是正态分布 $N(0,\sigma^2)$ 与参数为 λ 的指数分布的概率密度，则

（A）$a=1,b=0$.　　（B）$a=\frac{3}{4},b=\frac{1}{4}$.

（C）$a=b=\frac{1}{2}$.　　（D）$a=\frac{1}{4},b=\frac{3}{4}$.

二、填空题：9-14 小题，每小题 4 分，共 24 分．请将答案写在答题纸指定位置上.

（9）曲线 $y=\dfrac{2x^3-3x+4}{x^2+5}\arctan x$ 当 $x\to+\infty$ 时的斜渐近线方程是__________.

（10）不定积分 $I=\int e^{2\arctan x}\dfrac{(1+x)^2}{1+x^2}dx=$__________.

（11）设某商品的需求函数为 $Q=160-2P$，其中 Q,P 分别表示需求量与价格. 如果该商品需求弹性等于 1，则商品价格是__________.

（12）幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n\left[2^n+(-3)^n\right]}(x+1)^n$ 的收敛域是__________.

（13）设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 相似，$\boldsymbol{A}^2=2\boldsymbol{E}$，则行列式 $|\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}|=$_______.

（14）已知随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|},-\infty<x<+\infty$.则 $D(X^2)=$_________.

三、解答题：15－23 小题，共 94 分．请将解答写在答题纸指定的位置上．解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（15）**（本题满分 10 分）**

设 $z=z(x,y)$ 有二阶连续偏导数，且满足 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$，若有 $z(x,2x)=x$，$z_1'(x,2x)=z_x'(x,y)\big|_{y=2x}=x^2$，求 $z_{11}''(x,2x)$ 与 $z_{12}''(x,2x)$.

（16）**（本题满分 10 分）**

求二重积分 $\iint\limits_D y d\sigma$，其中 D 是由曲线 $r=2(1+\cos\theta)$ 的上半部分与极轴所围成的区域.

（17）（**本题满分 10 分**）

设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 内二阶可导，且 $f(0)=f'(0)=0$，并当 $x>0$ 时满足 $xf''(x)+3x[f'(x)]^2\le 1-e^{-x}$. 求证：当 $x>0$ 时 $f(x)<\frac{1}{2}x^2$.

（18）（**本题满分 10 分**）

设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续，在 $(0,1)$ 内 $f(x)>0$ 且 $xf'(x)=f(x)+\frac{3}{2}ax^2$，又由曲线 $y=f(x)$ 与直线 $x=1, y=0$ 围成平面图形的面积为 2，求函数 $y=f(x)$，问 a 为何值时，此图形绕 x 轴旋转而成的旋转体体积最小？

（19）（**本题满分 10 分**）

设函数 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续，且 $\int_0^{\pi} f(x)dx=\int_0^{\pi} f(x)\cos x dx=0$. 试证明：在 $(0,\pi)$ 内至少存在两个不同的点 ξ_1,ξ_2，使 $f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$.

（20）（**本题满分 11 分**）当 a,b 取何值时，方程组 $\begin{cases} x_1+2x_3+2x_4=6, \\ 2x_1+x_2+3x_3+ax_4=0, \\ 3x_1+ax_3+6x_4=18, \\ 4x_1-x_2+9x_3+13x_4=b \end{cases}$ 有唯一解，无解，有无穷多解？当方程组有解时，求通解.

（21）（**本题满分 11 分**）三阶实对称矩阵的三个特征值为 $\lambda_1=6,\lambda_2=\lambda_3=3$，对应于 $\lambda_2=\lambda_3=3$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$，求对应于 $\lambda_1=6$ 的特征向量及矩阵 $\boldsymbol{A}$.

（22）（**本题满分 11 分**）

设 (X,Y) 的分布函数为 $F(x,y)=A(B+\arctan\frac{x}{2})(C+\arctan\frac{y}{3})$.求：

（Ⅰ）系数 A,B和C；

（Ⅱ）(X,Y) 的概率密度；

（Ⅲ）边缘分布函数及边缘概率密度，并判断 X 和 Y 是否相互独立.

（23）（**本题满分 11 分**）

有甲、乙、丙三个口袋，其中甲袋装有 1 个红球，2 个白球，3 个黑球；乙袋装有 2 个红球，1 个白球，2 个黑球；丙袋装有 2 个红球，3 个白球.现任取一袋，从中任取 2 个球，用 X 表示取到的红球数，Y 表示取到的白球数，Z 表示取到的黑球数.

（Ⅰ）求 (X,Y) 的联合分布；

（Ⅱ）求 $\operatorname{cov}(X,Y)+\operatorname{cov}(Y,Z)$.

2013 年考研数学三全真模拟题（二）答案及解析

来源：高学网教学研发中心

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分. 下列每题给出的四个选项中，只有一个选项是符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

（1）已知当 $x\to 0$ 时 $f(x)=\tan x-\ln(1+\sin x)$ 与 kx^n 是等价无穷小量，则

（A）$k=-\dfrac{1}{2},n=2.$　　（B）$k=\dfrac{1}{2},n=2.$

（C）$k=-\dfrac{1}{2},n=3.$　　（D）$k=\dfrac{1}{2},n=3.$

【答案】 B.

【解析】 利用洛必达法则计算如下含有待定正整数 n 的极限，可得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x-\ln(1+\sin x)}{x^n}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{nx^{n-1}}\left(\frac{1}{\cos^2 x}-\frac{\cos x}{1+\sin x}\right)$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos^2 x(1+\sin x)}\lim_{x\to 0}\frac{1+\sin x-\cos^3 x}{nx^{n-1}}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{1+\sin x-\cos^3 x}{nx^{n-1}}=\lim_{x\to 0}\frac{\cos x+3\cos^2 x\sin x}{n(n-1)x^{n-2}}$$

$$=\begin{cases}0, & 0<n<2,\\ \dfrac{1}{n(n-1)}, & n=2,\\ \infty, & n>2,\end{cases}$$

故 $k=\dfrac{1}{2},n=2.$ 故应选（B）.

（2）设级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}u_n$ 条件收敛，$a_n=\dfrac{1}{2}\left(|u_n|+u_n\right)$，$b_n=\dfrac{1}{2}\left(|u_n|-u_n\right),n=1,2,3\ldots$，则

（A）级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n,\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 都发散.　　（B）级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n,\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 都收敛.

（C）级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 发散.　　（D）级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散，$\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛

【答案】 A.

【解析】 如果$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$与$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$都收敛，则由$|u_n|=a_n+b_n$知$\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$必收敛，矛盾.

如果$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$收敛，$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$发散，则因$\sum_{n=1}^{\infty}b_n=\sum_{n=1}^{\infty}a_n-\sum_{n=1}^{\infty}u_n$，且$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$与$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$都收敛知$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$也收敛，与$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$发散矛盾. 同理级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n$发散，$\sum_{n=1}^{\infty}b_n$收敛也导致矛盾.

所以只可能是$\sum_{n=1}^{\infty}a_n,\sum_{n=1}^{\infty}b_n$同时发散. 故应选（A）.

（3）设C_1,C_2是两个任意常数，则方程$y=C_1e^{2x}+C_2e^{-x}-2xe^{-x}$满足的一个微分方程是

（A）$y''+y'-2y=6e^{-x}$.　　（B）$y''-y'-2y=6e^{-x}$.

（C）$y''+y'-2y=3xe^{-x}$.　　（D）$y''-y'-2y=3xe^{-x}$.

【答案】 B.

【解析】 由题设知所求微分方程的特征根分别是$\lambda_1=2$与$\lambda_2=-1$，从而特征方程是

$$(\lambda-2)(\lambda+1)=0,\ \text{即}\ \lambda^2-\lambda-2=0.$$

由此可见所求方程的形式是$y''-y'-2y=f(x)$.

记$\overline{y}=-2xe^{-x}$，则方程的右端项$f(x)=\overline{y}''-\overline{y}'-2\overline{y}$.

由于$\overline{y}'=2(x-1)e^{-x},\overline{y}''=2(2-x)e^{-x}$，

故$f(x)=2(2-x)e^{-x}-2(x-1)e^{-x}+4xe^{-x}=6e^{-x}$，代入即得相应的微分方程是

$$y''-y'-2y=6e^{-x}.$$

故应选（B）.

（4）设$z=z(x,y)$由方程$y+z=xf(y^2-z^2)$确定，且f可微，则$x\frac{\partial z}{\partial x}+z\frac{\partial z}{\partial y}$等于

（A）x.　　（B）y.　　（C）z.　　（D）1.

【答案】 B.

【解法一】 令$F(x,y,z)=y+z-xf(y^2-z^2)$，于是

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F'_x}{F'_z}=-\frac{-f}{1+2xzf'}=\frac{f}{1+2xzf'},\quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F'_y}{F'_Z}=-\frac{1-2xyf'}{1+2xzf'},$$

所以 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+z\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{xf-z+2xyzf'}{1+2xzf'}=\dfrac{xf-xf+y+2xyzf'}{1+2xzf'}=y.$

故应选（B）.

【解法二】 利用一阶全微分形式不变性求解. 为此首先将方程写成

$$xf(y^2-z^2)-y-z=0,$$

然后将上式两端求全微分，得

$$\begin{aligned}0&=d\left[xf(y^2-z^2)\right]-dy-dz\\&=fdx+xf'd(y^2-z^2)-dy-dz\\&=fdx+x(2ydy-2zdz)f'-dy-dz\\&=fdx+(2xyf'-1)dy-(2xzf'+1)dz,\end{aligned}$$

于是 $dz=\dfrac{f}{2xzf'+1}dx+\dfrac{2xyf'-1}{2xzf'+1}dy$,

由此可得 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+z\dfrac{\partial z}{\partial y}=\dfrac{xf}{2xzf'+1}+\dfrac{z(2xyf'-1)}{1+2xzf'}=\dfrac{xf-z+2xyzf'}{1+2xzf'}=y.$

（5）已知向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关，$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5$ 线性无关，则 $\mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4+\boldsymbol{\alpha}_5)$ 等于

（A）1.　　（B）2.　　（C）3.　　（D）4.

【答案】 D.

【解析】 因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关，排除（A），（B）.

$$3\le \mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4+\boldsymbol{\alpha}_5)\le 4$$

若 $\mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4+\boldsymbol{\alpha}_5)=3$，则 $\boldsymbol{\alpha}_4+\boldsymbol{\alpha}_5$ 可用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出，

设 $\boldsymbol{\alpha}_4+\boldsymbol{\alpha}_5=k_1\boldsymbol{\alpha}_1+k_2\boldsymbol{\alpha}_2+k_3\boldsymbol{\alpha}_3$　　（*）

因为 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_4$ 线性相关，所以 $\boldsymbol{\alpha}_4$ 可用 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性表出，

设 $\boldsymbol{\alpha}_4=\lambda_1\boldsymbol{\alpha}_1+\lambda_2\boldsymbol{\alpha}_2+\lambda_3\boldsymbol{\alpha}_3$，将该表达式代入（*）得

$\boldsymbol{\alpha}_5=(k_1-\lambda_1)\boldsymbol{\alpha}_1+(k_2-\lambda_2)\boldsymbol{\alpha}_2+(k_3-\lambda_3)\boldsymbol{\alpha}_3$ 和 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_5$ 线性无关矛盾.

所以 $\mathrm{r}(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4+\alpha_5)=4$，故答案选（D）.

（6）设 $\boldsymbol{A}$ 为 4 阶实对称矩阵，且 $\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}=\boldsymbol{0}$．若 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})=1$，则二次型 $\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{A}\boldsymbol{x}$ 在正交变换下的标准形是

（A）$y_1^2+y_2^2+y_3^2-3y_4^2$.　　（B）$y_1^2-3y_2^2-3y_3^2-3y_4^2$.

（C）$y_1^2+y_2^2-3y_3^2-3y_4^2$.　　（D）$y_1^2+y_2^2+y_3^2-y_4^2$.

【答案】 A.

【解析】 由 $\boldsymbol{A}^2+2\boldsymbol{A}-3\boldsymbol{E}=\boldsymbol{0}$ 有 $(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E})=\boldsymbol{0}$，从而

$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})+\mathrm{r}(\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E})\le 4.$$

又
$$\mathrm{r}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})+\mathrm{r}(\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E})=\mathrm{r}(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})+\mathrm{r}(\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E})$$
$$\ge \mathrm{r}\left[(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})+(\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E})\right]=\mathrm{r}(4\boldsymbol{E})=\mathrm{r}(\boldsymbol{E})=4,$$

因而 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})+\mathrm{r}(\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E})=4$．于是 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E})=3$.

那么齐次方程组 $(\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 与 $(\boldsymbol{A}+3\boldsymbol{E})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$ 分别有 3 个与 1 个线性无关的解，亦即 $\lambda=1$ 与 $\lambda=-3$ 分别有 3 个与 1 个线性无关的特征向量．因此矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的特征值为 1，1，1，－3．故应选（A）.

（7）设二维随机变量 (X_1,X_2) 的密度函数为 $f(x_1,x_2)$，则随机变量 (Y_1,Y_2)（其中 $Y_1=2X_1, Y_2=\frac{1}{3}X_2$）的概率密度 $f_1(y_1,y_2)$ 等于

（A）$f(\frac{y_1}{2},3y_2)$.　　（B）$\frac{3}{2}f(\frac{y_1}{2},3y_2)$.

（C）$f(2y_1,\frac{y_2}{3})$.　　（D）$\frac{2}{3}f(2y_1,\frac{y_2}{3})$.

【答案】 B.

【解析】 设 (X_1,X_2) 的分布函数为 $F(x_1,x_2)$，(Y_1,Y_2) 的分布函数为 $F_1(y_1,y_2)$，则有

$$F_1(y_1,y_2)=P\{Y_1\le y_1,Y_2\le y_2\}=P\{2X_1\le y_1,\frac{1}{3}X_2\le y_2\}$$
$$=P\{X_1\le\frac{y_1}{2},X_2\le 3y_2\}=F(\frac{y_1}{2},3y_2).$$

所以 $f_1(y_1,y_2)=\frac{3}{2}f(\frac{y_1}{2},3y_2)$.

（8）设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)$，已知 $F(0)=\frac{1}{8}$，且其概率密度 $f(x)=af_1(x)+bf_2(x)$，其中 $f_1(x),f_2(x)$ 分别是正态分布 $N(0,\sigma^2)$ 与参数为 λ 的指数分布的概率密度，则

（A）$a=1,b=0$.　　　　（B）$a=\frac{3}{4},b=\frac{1}{4}$.

（C）$a=b=\frac{1}{2}$.　　　　（D）$a=\frac{1}{4},b=\frac{3}{4}$.

【答案】 D.

【解析】 已知 $F(0)=\frac{1}{8}$，即

$$\int_{-\infty}^{0}f(x)dx=a\int_{-\infty}^{0}f_1(x)dx+b\int_{-\infty}^{0}f_2(x)dx=a\Phi(0)=a\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{8},$$

故 $a=\frac{1}{4}$. 又 $\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=1$, 即

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(x)dx=\int_{-\infty}^{+\infty}af_1(x)dx+\int_{-\infty}^{+\infty}bf_2(x)dx=a+b=1,$$

计算知 $b=\frac{3}{4}$，故应选（D）.

二、填空题：9-14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

（9）曲线 $y=\frac{2x^3-3x+4}{x^2+5}\arctan x$ 当 $x\to+\infty$ 时的斜渐近线方程是__________.

【答案】 $y=\pi x-2$.

【解析】 由于

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{y}{x}=\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{2x^3-3x+4}{x(x^2+5)}\arctan x\right]=2\lim_{x\to+\infty}\arctan x=\pi,$$

$$\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty}(y-\pi x)&=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^3-3x+4}{x^2+5}\arctan x-\pi x\right)\\&=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2x^3+10x}{x^2+5}\arctan x-\pi x\right)+\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4-13x}{x^2+5}\arctan x\right)\\&=\lim_{x\to+\infty}x(2\arctan x-\pi)=\lim_{x\to+\infty}\frac{2\arctan x-\pi}{\frac{1}{x}}\\&=-\lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2}{1+x^2}=-2,\end{aligned}$$

故所求的渐近线方程是 $y=\pi x-2$.

（10）不定积分 $I=\int e^{2\arctan x}\frac{(1+x)^2}{1+x^2}dx=$__________.

【答案】 $xe^{2\arctan x}+C$.

【解析】 令 $t=\arctan x$，则 $dt=\frac{1}{1+x^2}dx$．于是

$$\begin{aligned}I&=\int e^{2t}(1+\tan t)^2dt=\int e^{2t}\left(\sec^2 t+2\tan t\right)dt=\int e^{2t}\sec^2 tdt+2\int e^{2t}\tan tdt\\&=\int e^{2t}d(\tan t)+\int \tan tde^{2t}=e^{2t}\tan t-\int \tan td\left(e^{2t}\right)+\int \tan td\left(e^{2t}\right)\\&=e^{2t}\tan t+C=xe^{2\arctan x}+C.\end{aligned}$$

（11）设某商品的需求函数为 $Q=160-2P$，其中 Q,P 分别表示需求量与价格. 如果该商品需求弹性等于 1，则商品价格是__________.

【答案】 40.

【解析】需求弹性 $\frac{EQ}{EP}=-\frac{Q'(P)}{Q(P)}P=-\frac{-2}{160-2P}P=1$, 解得 $P=40$.

（12）幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\left[2^n+(-3)^n\right]}(x+1)^n$ 的收敛域是__________.

【答案】 $[-4,2)$.

【解析】 因为

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{n\left[2^n+(-3)^n\right]}{(n+1)\left[2^{n+1}+(-3)^{n+1}\right]}\right|=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left|\frac{1+\left(-\frac{2}{3}\right)^n}{1+\left(-\frac{2}{3}\right)^{n+1}}\right|=\frac{1}{3},$$

从而，幂级数的收敛半径是 $R=3$.

当 $x+1=3$, 即 $x=2$ 时，幂级数变成正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\frac{1}{1+\left(-\frac{2}{3}\right)^n}$，把它的通项记为 u_n，则 u_n

满足 $\lim_{n\to\infty}nu_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{1+\left(-\frac{2}{3}\right)^n}=1$．故幂级数在 $x=2$ 处发散.

当 $x+1=-3$, 即 $x=-4$ 时，幂级数变成交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\frac{1}{1+\left(-\frac{2}{3}\right)^n}$，把它的通项记为 u_n，

则 u_n 可分解为 $u_n=\frac{(-1)^n}{n}-\frac{\left(-\frac{2}{3}\right)^n}{n\left[1+\left(-\frac{2}{3}\right)^n\right]}$，由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$ 条件收敛，而级数

$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-\frac{2}{3}\right)^n}{n\left[1+\left(-\frac{2}{3}\right)^n\right]}$ 绝对收敛，故这两个级数的和级数，即幂级数在 $x=-4$ 处条件收敛.

综合即得幂级数的收敛域是 $[-4,2)$.

（13）设 n 阶方阵 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 相似，$\boldsymbol{A}^2=2\boldsymbol{E}$，则行列式 $|\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}|=$ ______.

【答案】 1.

【解析】 $\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}=(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E})$.

由方阵 $\boldsymbol{A}$、$\boldsymbol{B}$ 相似，$\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}$ 与 $\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E}$ 相似，所以 $|\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=|\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E}|$，故

$$\begin{aligned}|\boldsymbol{AB}+\boldsymbol{A}-\boldsymbol{B}-\boldsymbol{E}|&=|(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E})|=|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}||\boldsymbol{B}+\boldsymbol{E}|\\&=|\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E}||\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E}|=|(\boldsymbol{A}-\boldsymbol{E})(\boldsymbol{A}+\boldsymbol{E})|\\&=|\boldsymbol{A}^2-\boldsymbol{E}|=|\boldsymbol{E}|=1.\end{aligned}$$

（14）已知随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\frac{1}{2}e^{-|x|},-\infty<x<+\infty$.则 $D(X^2)=$ ________.

【答案】 20.

【解析】 由于 $D(X^2)=E(X^4)-(EX^2)^2$.

$$EX^2=\int_{-\infty}^{+\infty}x^2f(x)dx=2\int_0^{+\infty}x^2\cdot\frac{1}{2}e^{-|x|}dx=\int_0^{+\infty}x^2e^{-x}dx=2!$$
$$EX^4=\int_{-\infty}^{+\infty}x^4f(x)dx=2\int_0^{+\infty}x^4\cdot\frac{1}{2}e^{-|x|}dx=\int_0^{+\infty}x^4e^{-x}dx=4!$$

所以 $D(X^2)=4!-(2!)^2=24-4=20$.

三、解答题：15－23 小题，共 94 分. 请将解答写在答题纸指定的位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（15）（**本题满分 10 分**）设 $z=z(x,y)$ 有二阶连续偏导数，且满足 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}-\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$，若有 $z(x,2x)=x$，$z_1'(x,2x)=z_x'(x,y)\big|_{y=2x}=x^2$，求 $z_{11}''(x,2x)$ 与 $z_{12}''(x,2x)$.

【解析】 $z(x,2x)$ 是 $z(x,y)$ 与 $y=2x$ 的复合函数，先将 $z(x,2x)=x$ 两边对 x 求导，由复合函数求导法得 $z_1'(x,2x)+2z_2'(x,2x)=1$，其中 $z_1'(x,2x)=x^2$.

于是 $x^2+2z_2'(x,2x)=1$，再将它对 x 求导并由复合函数求导法得

$$2x+2z_{21}''(x,2x)+4z_{22}''(x,2x)=0.$$

由于 $z_{21}''=z_{12}''$，以及 $z_{11}''=z_{22}''$，可得 $z_{11}''(x,2x)$ 与 $z_{12}''(x,2x)$ 满足关系式

$$2z_{11}''(x,2x)+z_{12}''(x,2x)=-x.$$

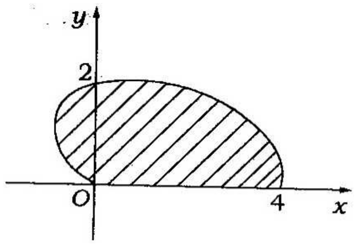
将已知等式 $z_1'(x,2x)=x^2$ 对 x 求导得 $z_{11}''(x,2x)+2z_{12}''(x,2x)=2x$. 由上面两个关系式得

$$z_{11}''(x,2x)=-\frac{4}{3}x,z_{12}''(x,2x)=\frac{5}{3}x.$$

（16）（**本题满分 10 分**）求二重积分 $\iint\limits_D y\,d\sigma$，其中 D 是由曲线 $r=2(1+\cos\theta)$ 的上半部分与极轴所围成的区域.

【解析】 积分域 D 如图，D 的极坐标表示是：

$0\le\theta\le\pi,0\le r\le 2(1+\cos\theta)$，于是



$$原式=\iint\limits_D r^2\sin\theta drd\theta=\int_0^\pi\sin\theta d\theta\int_0^{2(1+\cos\theta)}r^2dr$$

$$=\int_0^\pi\sin\theta\cdot\frac{1}{3}r^3\Big|_0^{2(1+\cos\theta)}d\theta=\frac{8}{3}\int_0^\pi(1+\cos\theta)^3\sin\theta d\theta$$

$$=-\frac{8}{3\times 4}(1+\cos\theta)^4\Big|_0^\pi=\frac{32}{3}.$$

（17）（**本题满分 10 分**）设函数 $f(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 内二阶可导，且 $f(0)=f'(0)=0$，并当 $x>0$ 时满足 $xf''(x)+3x[f'(x)]^2\le 1-e^{-x}$. 求证：当 $x>0$ 时 $f(x)<\dfrac{1}{2}x^2$.

【证明一】 由泰勒公式得

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{1}{2}f''(\xi)x^2=\frac{1}{2}f''(\xi)x^2 \qquad (*)$$

其中，$x>0,0<\xi<x$.

现只需证：$f''(x)<1(x>0)$.由假设条件有

$$f''(x)\le\frac{1-e^{-x}}{x}-3[f'(x)]^2\le\frac{1-e^{-x}}{x}(x>0).$$

因此只需证

$$\frac{1-e^{-x}}{x}<1(x>0)\Leftrightarrow 1-e^{-x}<x(x>0).$$

令 $F(x)=x-(1-e^{-x})=x+e^{-x}-1$.

$\Rightarrow \quad F(0)=0,\quad F'(x)=1-e^{-x}>0(x>0)$.

$\Rightarrow \quad F(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 单调增加，$F(x)>F(0)=0(x>0)$.

即 $x>1-e^{-x}(x>0),\quad \frac{1-e^{-x}}{x}<1(x>0)$.

最后由（*）式得

$$f(x)<\frac{1}{2}x^2(x>0).$$

【证明二】 要证 $f(x)<\frac{1}{2}x^2(x>0)$，即证

$$F(x)\overset{记}{=}\frac{1}{2}x^2-f(x)>0(x>0)$$.

（**）

由于

$$\begin{aligned}&F(0)=0,\\&F'(x)=x-f'(x),\quad F'(0)=0,\\&F''(x)=1-f''(x),\end{aligned}$$

因此为证（**）式，只需证 $1-f''(x)>0(x>0)$，即 $f''(x)<1(x>0)$.

现如同前面所证 $f''(x)<1(x>0)$，于是 $F''(x)=1-f''(x)>0(x>0)\Rightarrow F'(x)$ 在 $[0,+\infty)$ 单调增加 $\Rightarrow F(x)>F(0)=0(x>0)$，即 $f(x)<\frac{1}{2}x^2(x>0)$.

（18）（**本题满分 10 分**）设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 连续，在 $(0,1)$ 内 $f(x)>0$ 且 $xf'(x)=f(x)+\frac{3}{2}ax^2$，又由曲线 $y=f(x)$ 与直线 $x=1,y=0$ 围成平面图形的面积为 2，求函数 $y=f(x)$，问 a 为何值时，此图形绕 x 轴旋转而成的旋转体体积最小？

【解析】 （Ⅰ）将 $xf'(x)=f(x)+\frac{3}{2}ax^2$ 变形得 $f'(x)-\frac{1}{x}f(x)=\frac{3}{2}ax$，这是一阶线性微分方程，由一阶线性微分方程的通解公式得，

$$f(x)=e^{\int\frac{1}{x}dx}\left[\int\frac{3}{2}axe^{-\int\frac{1}{x}dx}dx+C\right]=\frac{3}{2}ax^2+Cx,x\in[0,1],$$

其中 C 为任意常数使得 $f(x)>0(x\in(0,1))$.

（Ⅱ）确定 C 与 a 的关系使得由 $y=f(x)$ 与 $x=1,y=0$ 围成的平面图形的面积为 2. 由已知条件得 $2=\int_0^1\left(\frac{3}{2}ax^2+Cx\right)dx=\frac{1}{2}a+\frac{1}{2}C$，则 $C=4-a$．因此，$f(x)=\frac{3}{2}ax^2+(4-a)x$，其中 a 为任意常数使得 $f(x)>0(x\in(0,1))$. $\forall a$，有 $f(0)=0$，$f(1)=\frac{3}{2}a+4-a=4+\frac{a}{2}$. 又 $f'(x)=3ax+(4-a)$，由此易知 $-8\le a\le 4$ 时 $f(x)>0(x\in(0,1))$.

（Ⅲ）求旋转体的体积.

$$V(a)=\pi\int_0^1 f^2(x)dx=\pi\int_0^1\left[\frac{3}{2}ax^2+(4-a)x\right]^2dx$$

$$=\pi\int_0^1\left[\left(\frac{9}{4}x^4+x^2-3x^3\right)a^2+(12x^3-8x^2)a+16x^2\right]dx=\pi\left(\frac{1}{30}a^2+\frac{1}{3}a+\frac{16}{3}\right).$$

（Ⅳ）求 $V(a)$ 的最小值点．由于

$$V'(a)=\left(\frac{1}{15}a+\frac{1}{3}\right)\pi\begin{cases}<0,a<-5,\\=0,a=-5,\\>0,a>-5,\end{cases}$$

则当 $a=-5$ 时 $f(x)>0(x\in(0,1))$，旋转体体积取最小值.

（19）（**本题满分 10 分**）设函数 $f(x)$ 在 $[0,\pi]$ 上连续，且 $\int_0^\pi f(x)dx=\int_0^\pi f(x)\cos xdx=0$. 试证明：在 $(0,\pi)$ 内至少存在两个不同的点 ξ_1,ξ_2，使 $f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$.

【证法一】 令 $F(x)=\int_0^x f(t)dt,0\le x\le\pi$，则有 $F(0)=0,F(\pi)=0$．又因为

$$0=\int_0^\pi f(x)\cos xdx=\int_0^\pi\cos xdF(x)=F(x)\cos x\big|_0^\pi+\int_0^\pi F(x)\sin xdx=\int_0^\pi F(x)\sin xdx,$$

所以存在 $\xi\in(0,\pi)$，使 $F(\xi)\sin\xi=0$，因若不然，则在 $(0,\pi)$ 内 $F(x)\sin x$ 恒为正或恒为负，均与 $\int_0^\pi F(x)\sin xdx=0$ 矛盾．但当 $\xi\in(0,\pi)$ 时 $\sin\xi\ne0$，故 $F(\xi)=0$.

由以上证得，存在满足$0<\xi<\pi$的ξ，使得

$$F(0)=F(\xi)=F(\pi)=0.$$

再对$F(x)$在区间$[0,\xi],[\xi,\pi]$上分别用罗尔定理知，至少存在$\xi_1\in(0,\xi),\xi_2\in(\xi,\pi)$，使得

$F'(\xi_1)=F'(\xi_2)=0$，即$f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$.

【证法二】 由$\int_0^\pi f(x)dx=0$知，存在$\xi_1\in(0,\pi)$，使$f(\xi_1)=0$. 因若不然，则在$(0,\pi)$内$f(x)$恒为正或恒为负，均与$\int_0^\pi f(x)dx=0$矛盾.若在$(0,\pi)$内$f(x)=0$仅有一个实根$x=\xi_1$，则由$\int_0^\pi f(x)dx=0$知，$f(x)$在$(0,\xi_1)$内与(ξ_1,π)内异号.

不妨设在$(0,\xi_1)$内$f(x)>0$，在(ξ_1,π)内$f(x)<0$，于是再由

$$\int_0^\pi f(x)\cos xdx=0 \text{ 与 } \int_0^\pi f(x)dx=0$$

及$\cos x$在$[0,\pi]$上的单调性知：

$$0=\int_0^\pi f(x)(\cos x-\cos\xi_1)dx=\int_0^{\xi_1} f(x)(\cos x-\cos\xi_1)dx+\int_{\xi_1}^\pi f(x)(\cos x-\cos\xi_1)dx>0,$$

得出矛盾.

从而推知在$(0,\pi)$内除ξ_1外$f(x)=0$至少还有另一实根ξ_2，故知存在$\xi_1,\xi_2\in(0,\pi),\xi_1\neq\xi_2$，使得$f(\xi_1)=f(\xi_2)=0$.

（20）（**本题满分 11 分**）当a,b取何值时，方程组$\begin{cases}x_1+2x_3+2x_4=6,\\2x_1+x_2+3x_3+ax_4=0,\\3x_1+ax_3+6x_4=18,\\4x_1-x_2+9x_3+13x_4=b\end{cases}$有唯一解，无解，有无穷多解？当方程组有解时，求通解.

【解析】 将增广矩阵用初等行变换化为阶梯形

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&2&2&6\\2&1&3&a&0\\3&0&a&6&18\\4&-1&9&13&b\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&2&2&6\\0&1&-1&a-4&-12\\0&0&a-6&0&0\\0&-1&1&5&b-24\end{array}\right)\to\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&2&2&6\\0&1&-1&a-4&-12\\0&0&a-6&0&0\\0&0&0&a+1&b-36\end{array}\right).$$

（Ⅰ）当$a=-1,b\neq36$时，$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=3,\mathrm{r}(\overline{\boldsymbol{A}})=4$，方程组无解.

（Ⅱ）当$a\neq-1,a\neq6$时，$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\overline{\boldsymbol{A}})=4$，方程组有唯一解，由下往上依次可解出

$$x_4=\frac{b-36}{a+1},x_3=0,x_2=-12-\frac{(a-4)(b-36)}{a+1},x_1=6-\frac{2(b-36)}{a+1};$$

（Ⅲ）当 $a=-1,b=36$ 时，$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\overline{\boldsymbol{A}})=3$，方程组有无穷多解，此时方程组化为

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&2&2&6\\0&1&-1&-5&-12\\0&0&-7&0&0\end{array}\right).$$

令 $x_4=0$，有 $x_3=0,\ x_2=-12,\ x_1=6$，即特解是 $\boldsymbol{\xi}=(6,-12,0,0)^{\mathrm{T}}$.

令 $x_4=1$，解齐次方程组有 $x_3=0,\ x_2=5,\ x_1=-2$，即 $\boldsymbol{\eta}=(-2,5,0,1)^{\mathrm{T}}$ 是基础解系.

所以通解为 $\boldsymbol{\xi}+k\boldsymbol{\eta}=(6,-12,0,0)^{\mathrm{T}}+k(-2,5,0,1)^{\mathrm{T}}$，（其中 k 为任意常数）.

（Ⅳ）当 $a=6$ 时，$\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\overline{\boldsymbol{A}})=3$，方程组有无穷多解，此时方程组化为

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&2&2&6\\0&1&-1&2&-12\\0&0&0&7&b-36\end{array}\right).$$

令 $x_3=0$，有特解 $\boldsymbol{\alpha}=\left(\frac{1}{7}(114-2b),-\frac{1}{7}(12+2b),0,\frac{1}{7}(b-36)\right)^{\mathrm{T}}$.

令 $x_3=1$，有齐次方程组基础解系 $\boldsymbol{\beta}=\left(-2,1,1,0\right)^{\mathrm{T}}$，

所以通解是 $\boldsymbol{\alpha}+k\boldsymbol{\beta}=\left(\frac{1}{7}(114-2b),-\frac{1}{7}(12+2b),0,\frac{1}{7}(b-36)\right)^{\mathrm{T}}+k\left(-2,1,1,0\right)^{\mathrm{T}}$，（其中 k 为任意常数）.

（21）（**本题满分 11 分**）三阶实对称矩阵的三个特征值为 $\lambda_1=6,\lambda_2=\lambda_3=3$，对应于 $\lambda_2=\lambda_3=3$ 的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_2=\begin{pmatrix}-1\\0\\1\end{pmatrix},\boldsymbol{\alpha}_3=\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$，求对应于 $\lambda_1=6$ 的特征向量及矩阵 $\boldsymbol{A}$.

【解析】 设 $\lambda_1=6$ 对应的特征向量为 $\boldsymbol{\alpha}_1=\left(x_1,\ \ x_2,\ \ x_3\right)^{\mathrm{T}}$，

$\therefore \boldsymbol{\alpha}_1\perp\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_1\perp\boldsymbol{\alpha}_3$，

$$\therefore\begin{cases}-x_1+x_3=0,\\x_1-2x_2+x_3=0,\end{cases}\quad 取\ \boldsymbol{\alpha}_1=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

令 $\boldsymbol{P}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3)=\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&0&-2\\1&1&1\end{pmatrix}$，

则 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{P}\begin{pmatrix}6&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{pmatrix}\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&0&-2\\1&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}6&0&0\\0&3&0\\0&0&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&-1&1\\1&0&-2\\1&1&1\end{pmatrix}^{-1}=\begin{pmatrix}4&1&1\\1&4&1\\1&1&4\end{pmatrix}$.

（22）（**本题满分 11 分**）

设 (X,Y) 的分布函数为 $F(x,y)=A(B+\arctan\frac{x}{2})(C+\arctan\frac{y}{3})$.求：

（Ⅰ）系数 A,B和C；

（Ⅱ）(X,Y) 的概率密度；

（Ⅲ）边缘分布函数及边缘概率密度，并判断 X 和 Y 是否相互独立.

【解析】（Ⅰ）由分布函数的性质知

$$F(+\infty,+\infty)=A(B+\frac{\pi}{2})(C+\frac{\pi}{2})=1$$
$$F(x,-\infty)=A(B+\arctan\frac{x}{2})(C-\frac{\pi}{2})=0$$
$$F(-\infty,y)=A(B-\frac{\pi}{2})(C+\arctan\frac{y}{3})=0$$

由上面三式可得 $A=\frac{1}{\pi^2},B=C=\frac{\pi}{2}$,

即 $F(x,y)=\frac{1}{\pi^2}(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{x}{2})(\frac{\pi}{2}+\arctan\frac{y}{3})$.

（Ⅱ）(X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\frac{\partial^2F(x,y)}{\partial x\partial y}=\frac{6}{\pi^2(x^2+4)(y^2+9)}.$$

（Ⅲ）X、Y 的边缘分布函数分别为

$$F_X(x)=F(x,+\infty)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arctan\frac{x}{2},$$
$$F_Y(y)=F(+\infty,y)=\frac{1}{2}+\frac{1}{\pi}\arctan\frac{y}{3},$$

边缘密度函数分别为

$$f_X(x)=\frac{dF_X(x)}{dx}=\frac{2}{\pi(4+x^2)},$$

$$f_Y(y)=\frac{dF_Y(y)}{dy}=\frac{3}{\pi(9+y^2)}.$$

因为 $f(x,y)=f_X(x)f_Y(y)$，故 X 和 Y 是相互独立的.

（23）（**本题满分 11 分**）

有甲、乙、丙三个口袋，其中甲袋装有 1 个红球，2 个白球，3 个黑球；乙袋装有 2 个红球，1 个白球，2 个黑球；丙袋装有 2 个红球，3 个白球.现任取一袋，从中任取 2 个球，用 X 表示取到的红球数，Y 表示取到的白球数，Z 表示取到的黑球数.

（Ⅰ）求 (X,Y) 的联合分布；

（Ⅱ）求 $\text{cov}(X,Y)+\text{cov}(Y,Z)$.

【解法一】（Ⅰ）依题意，随机变量 X、Y、Z 的可能取值均分别为 0，1，2，现求 (X,Y)与(Y,Z) 的联合分布，则有

$$P\{X=0,Y=0\}=P\{Y=0,Z=2\}=\frac{1}{3}(\frac{C_3^2}{C_6^2}+\frac{C_2^2}{C_5^2}+0)=\frac{1}{10},$$

$$P\{X=1,Y=0\}=P\{Y=0,Z=1\}=\frac{1}{3}(\frac{C_1^1C_3^1}{C_6^2}+\frac{C_2^1C_2^1}{C_5^2}+0)=\frac{1}{5},$$

$$P\{X=2,Y=0\}=P\{Y=0,Z=0\}=\frac{1}{3}(0+\frac{C_2^2}{C_5^2}+\frac{C_2^2}{C_5^2})=\frac{1}{15},$$

$$P\{X=0,Y=1\}=P\{Y=1,Z=1\}=\frac{1}{3}(\frac{C_2^1C_3^1}{C_6^2}+\frac{C_1^1C_2^1}{C_5^2}+0)=\frac{1}{5},$$

$$P\{X=1,Y=1\}=P\{Y=1,Z=0\}=\frac{1}{3}(\frac{C_1^1C_2^1}{C_6^2}+\frac{C_2^1C_1^1}{C_5^2}+\frac{C_2^1C_3^1}{C_5^2})=\frac{14}{45},$$

$$P\{X=0,Y=2\}=P\{Y=2,Z=0\}=\frac{1}{3}(\frac{C_2^2}{C_6^2}+0+\frac{C_3^2}{C_5^2})=\frac{11}{90},$$

从而 (X,Y)与(Y,Z) 的联合分布与边缘分布可列成下表：

X \ Y	0	1	2	
0	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{11}{90}$	$\frac{38}{90}$
1	$\frac{1}{5}$	$\frac{14}{45}$	0	$\frac{23}{45}$
2	$\frac{1}{15}$	0	0	$\frac{1}{15}$

	$\frac{11}{30}$	$\frac{23}{45}$	$\frac{11}{90}$	1

$Y \backslash Z$	0	1	2	
0	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{11}{30}$
1	$\frac{14}{45}$	$\frac{1}{5}$	0	$\frac{23}{45}$
2	$\frac{11}{90}$	0	0	$\frac{11}{90}$
	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{1}{10}$	1

（Ⅱ）$EX=\frac{23}{45}+\frac{2}{15}=\frac{29}{45}$， $EY=\frac{23}{45}+\frac{11}{45}=\frac{34}{45}$， $EZ=\frac{2}{5}+\frac{1}{5}=\frac{3}{5}$，

$$EXY=1\times1\times\frac{14}{45}=\frac{14}{45}, \quad EYZ=1\times1\times\frac{1}{5}=\frac{1}{5},$$

于是

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(X,Y)+\operatorname{cov}(Y,Z)&=(EXY-EXEY)+(EYZ-EYEZ)\\&=(\frac{14}{45}-\frac{29}{45}\times\frac{34}{45})+(\frac{1}{5}-\frac{34}{45}\times\frac{3}{5})\\&=-\frac{869}{2025}.\end{aligned}$$

【解法二】（Ⅰ）求(X,Y)的联合分布同解法一，但不需要求(Y,Z)的联合分布.

（Ⅱ）由于$Z=2-X-Y$，故

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(X,Y)+\operatorname{cov}(Y,Z)&=\operatorname{cov}(X,Y)+\operatorname{cov}(Y,2-X-Y)\\&=\operatorname{cov}(X,Y)-\operatorname{cov}(X,Y)-\operatorname{cov}(Y,Y)\\&=-DY.\end{aligned}$$

又$EY=\frac{34}{45}$，$EY^2=1$，$DY=1-(\frac{34}{45})^2=\frac{869}{2025}$，

故$\operatorname{cov}(X,Y)+\operatorname{cov}(Y,Z)=-\frac{869}{2025}$.