2013 年考研数学三全真模拟题（一）

来源：高学网教学研发中心

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分. 下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

（1）已知 $x \to 0$ 时 $f(x) = \tan x - \ln(1+\sin x)$ 与 kx^n 是等价无穷小量，则

（A）$k = -\frac{1}{2}, n = 2$.　　（B）$k = \frac{1}{2}, n = 2$.

（C）$k = -\frac{1}{2}, n = 3$.　　（D）$k = \frac{1}{2}, n = 3$.

（2）已知曲线 $y = y(x)$ 经过原点，且在原点的切线平行于直线 $2x - y - 5 = 0$，而 $y(x)$ 满足微分方程 $y'' - 6y' + 9y = e^{3x}$，则此曲线的方程为

（A）$y = \sin 2x$.　　（B）$y = \frac{1}{2}x^2 e^{2x} + \sin 2x$.

（C）$y = \frac{x}{2}(x+4)e^{3x}$.　　（D）$y = (x^2 \cos x + \sin 2x)e^{3x}$.

（3）定积分 $I = \int_{-1}^{1} \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}\right)dx$ 的值为

（A）$\frac{1}{3}$.　　（B）0.　　（C）$\frac{2}{3}$.　　（D）$-\frac{1}{3}$.

（4）设 $f(x)$ 为微分方程 $y' - xy = g(x)$ 满足 $y(0) = 1$ 的解，而 $g(x) = \int_0^x \sin(x-t)^2 dt$，则

（A）在点 $x = 0$ 处 $f(x)$ 取极大值.

（B）在点 $x = 0$ 处 $f(x)$ 取极小值.

（C）点 $(0, f(0))$ 为曲线 $y = f(x)$ 的拐点.

（D）$x = 0$ 不是 $f(x)$ 的极值点，$(0, f(0))$ 也不是曲线 $y = f(x)$ 的拐点.

（5）已知 $\boldsymbol{A}$ 是行列式值为-3 的 3 阶矩阵，$\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵，如果 $k\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵是 $\boldsymbol{A}^* - \left|\frac{1}{2}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right|\boldsymbol{A}^{-1}$，则 $k =$

（A）$-\frac{2}{3}$.　　（B）$-\frac{8}{21}$.　　（C）$-\frac{8}{27}$.　　（D）$-\frac{2}{9}$.

（6）已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$可逆，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a_{31} & a_{32}+3a_{33} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22}+3a_{23} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12}+3a_{13} & a_{13} \end{pmatrix}$，且

$\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix},\boldsymbol{P}_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix},\boldsymbol{P}_4=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{B}^{-1}=$

（A）$\boldsymbol{P}_4\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}_2$.　　（B）$\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}_4$.

（C）$\boldsymbol{P}_3\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}_4$.　　（D）$\boldsymbol{P}_4\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}_1$.

（7）进行一系列独立重复试验，假设每次试验的成功率都是 $p\ (0<p<1)$，则在试验成功 3 次前至少失败 2 次的概率 $\alpha=$

（A）$1-p^3-(1-p)p^3$.　　（B）$1-p^3-2(1-p)p^3$.

（C）$1-p^3-3(1-p)p^3$.　　（D）$1-p^3-4(1-p)p^3$.

（8）已知随机变量 X 在 $[-1,1]$ 上服从均匀分布，$Y=X^2$，则 X 与 Y

（A）相关且不独立.　　（B）不相关且独立.

（C）不相关且不独立.　　（D）相关且相互独立.

二、填空题：9-14 小题，每小题 4 分，共 24 分．请将答案写在答题纸指定位置上．

（9）设函数 f,g 均可微，$z=f\left(xy,\ln x+g(xy)\right)$，则 $x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}=$_____.

（10）已知某二阶常系数线性非齐次微分方程的通解为 $y=C_1e^x+C_2e^{-x}-\frac{1}{2}+\frac{1}{10}\cos 2x$，则此微分方程为_____.

（11）不定积分 $I=\int e^{2\arctan x}\frac{(1+x)^2}{1+x^2}dx=$_____.

（12）设生产函数为 $Q=AL^{\alpha}K^{\beta}$，其中 Q 是产出量，L 是劳动投入量，K 是资本投入量，而 A,α,β 均为大于零的参数，则当 $Q=1$ 时 K 关于 L 的弹性为_____.

（13）设 $\boldsymbol{\alpha}=(1,0,k)^{\mathrm{T}}$，矩阵 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$，$n$ 为正整数，若 $a\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^2\sim\begin{pmatrix} a-4 & & \\ & a & \\ & & a \end{pmatrix}$，则 $k=$_____.

（14）设随机变量 X 的密度函数为 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2+2x-1},-\infty<x<+\infty$，则 $EX=$ _____，$DX=$_____.

三、解答题：15－23 小题，共 94 分. 请将解答写在答题纸指定的位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（15）**（本题满分 10 分）**

设 $a_1=2$，$a_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(a_n+\dfrac{1}{a_n}\right)$，$n=1,2,\cdots$，

证明：（Ⅰ）$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在.

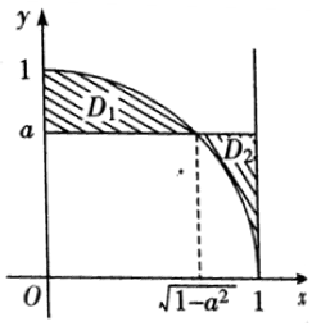
（Ⅱ）级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)$ 收敛.

（16）**（本题满分 9 分）**

计算累次积分 $I=\int_0^1 dx\int_{1-x}^{2-x}e^{(x+y)^2}dy+\int_1^2 dx\int_0^{2-x}e^{(x+y)^2}dy$.

（17）**（本题满分 9 分）**

求由曲线 $y=\sqrt{1-x^2}$ 与直线 $y=a(0<a<1)$ 以及 $x=0,x=1$ 围成的平面图形（如图的阴影部分）绕 x 轴旋转一周所成的旋转体的体积 $V(a)$.



（18）**（本题满分 11 分）**

求二元函数 $z=f(x,y)=x^2y(4-x-y)$ 在直线 $x+y=6$，x 轴与 y 轴围成的闭区域 D 上的最大值与最小值.

（19）**（本题满分 11 分）**

设 $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{f(x)}{x}=1$，且 $f''(x)>0$，证明：$f(x)>x(x\neq0)$.

（20）**（本题满分 11 分）**

线性方程组$\begin{cases} x_1-5x_2+2x_3-3x_4=11, \\ 5x_1+3x_2+cx_3-x_4=-1, \\ 2x_1+4x_2+2x_3+x_4=-6 \end{cases}$系数矩阵的秩为 2，求$c$及方程组的通解.

（21）**（本题满分 11 分）**

已知二次型$f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+2ax_2x_3$（$a>0$），若二次型$f$的规范形为$y_1^2+2y_2^2+5y_3^2$，求$a$的值及所使用的正交变换矩阵.

（22）**（本题满分 11 分）**

设二维离散型随机变量(X,Y)的取值为$(x_i,y_j)\ (i,j=1,2)$，且

$P\{X=x_2\}=\dfrac{3}{4}, P\{Y=y_1|X=x_2\}=\dfrac{2}{3}, P\{X=x_1|Y=y_1\}=\dfrac{1}{4}$，试求：

（Ⅰ）二维随机变量(X,Y)的联合概率分布；

（Ⅱ）X与Y的相关系数ρ_{XY}；

（Ⅲ）条件概率$P\{Y=y_j|X=x_1\}, j=1,2.$

（23）**（本题满分 11 分）**

设总体X的概率密度函数为

$$f(x;\theta)=\begin{cases} \sqrt{\theta}x^{\sqrt{\theta}-1}, & 0<x<1, \\ 0, & \text{其他}, \end{cases}$$

其中$\theta>0$为未知参数.又$x_1,x_2,\cdots,x_n$为取自总体X的样本观察值，求未知参数θ的矩估计值$\hat{\theta}_1$与最大似然估计值$\hat{\theta}_2$.

2013 年考研数学三全真模拟题（一）答案及解析

来源：高学网教学研发中心

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分. 下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

（1）已知 $x \to 0$ 时 $f(x) = \tan x - \ln(1+\sin x)$ 与 kx^n 是等价无穷小量，则

（A）$k = -\frac{1}{2}, n = 2$.　　（B）$k = \frac{1}{2}, n = 2$.

（C）$k = -\frac{1}{2}, n = 3$.　　（D）$k = \frac{1}{2}, n = 3$.

【答案】 B.

【解析】利用洛必达法则计算如下含有待定正整数 n 的极限，可得

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan x - \ln(1+\sin x)}{x^n} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{nx^{n-1}}\left(\frac{1}{\cos^2 x} - \frac{\cos x}{1+\sin x}\right)$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1}{\cos^2 x(1+\sin x)}\lim_{x\to 0}\frac{1+\sin x - \cos^3 x}{nx^{n-1}}$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{1+\sin x - \cos^3 x}{nx^{n-1}} = \lim_{x\to 0}\frac{\cos x + 3\cos^2 x\sin x}{n(n-1)x^{n-2}}$$

$$= \begin{cases} 0, & 0 < n < 2, \\ \dfrac{1}{n(n-1)}, & n = 2, \\ \infty, & n > 2, \end{cases}$$

故 $k = \frac{1}{2}, n = 2$. 故应选（B）.

（2）已知曲线 $y = y(x)$ 经过原点，且在原点的切线平行于直线 $2x - y - 5 = 0$，而 $y(x)$ 满足

微分方程 $y''-6y'+9y=e^{3x}$，则此曲线的方程为

（A） $y=\sin 2x$.　　（B） $y=\frac{1}{2}x^2e^{2x}+\sin 2x$.

（C） $y=\frac{x}{2}(x+4)e^{3x}$.　　（D） $y=(x^2\cos x+\sin 2x)e^{3x}$.

【答案】 C.

【解析】 由题设知 $y=y(x)$ 是 $y''-6y'+9y=e^{3x}$ 满足 $y(0)=0, y'(0)=2$ 的特解. 对应的特征方程为 $r^2-6r+9=0$，特征根 $r_1=r_2=3$. 从而对应的齐次微分方程的通解为 $y=C_1e^{3x}+C_2xe^{3x}$. 因非齐次项 $f(x)=e^{3x}$，从而可设非齐次微分方程 $y''-6y'+9y=e^{3x}$ 具有形式为 $y^*=Ax^2e^{3x}$ 的特解. 代入原方程确定常数 $A=\frac{1}{2}$，即原方程的通解为

$$y=\left(C_1+C_2x+\frac{1}{2}x^2\right)e^{3x}.$$

由 $y(0)=0, y'(0)=2$ 可确定 $C_1=0, C_2=2$. 故所求曲线的方程为

$y=\left(2+\frac{1}{2}x^2\right)e^{3x}=\frac{x}{2}(x+4)e^{3x}$. 故应选（C）.

（3）定积分 $I=\int_{-1}^{1}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}\right)dx$ 的值为

（A） $\frac{1}{3}$.　　（B） 0.　　（C） $\frac{2}{3}$.　　（D） $-\frac{1}{3}$.

【答案】 C.

【解析】 用分段积分法并在 $[-1,0]$ 与 $[0,1]$ 上用推广的牛顿-莱布尼茨公式

$$I=\int_{-1}^{0}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}\right)dx+\int_{0}^{1}\frac{d}{dx}\left(\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}\right)dx=\left.\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}\right|_{-1}^{0-}+\left.\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}\right|_{0^+}^{1}$$

$$=\left(1-\frac{1}{1+\frac{1}{2}}\right)+\left(\frac{1}{3}-0\right)=\frac{2}{3}.$$

故应选（C）.

（4）设 $f(x)$ 为微分方程 $y'-xy=g(x)$ 满足 $y(0)=1$ 的解，而 $g(x)=\int_0^x\sin(x-t)^2dt$，则

（A）在点 $x=0$ 处 $f(x)$ 取极大值.

（B）在点 $x=0$ 处 $f(x)$ 取极小值.

（C）点 $(0,f(0))$ 为曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

（D）$x=0$ 不是 $f(x)$ 的极值点，$(0,f(0))$ 也不是曲线 $y=f(x)$ 的拐点.

【答案】B.

【解析】 由 $y'-xy=g(x)$，$g(x)=\int_0^x \sin(x-t)^2 dt=\int_0^x \sin u^2 du$，知 $g(0)=0$，从而 $y'(0)=0$.

又 $y''=y+xy'+g'(x)=y+xy'+\sin x^2$，于是 $y''(0)=y(0)=1$，可见 $y=f(x)$ 在点 $x=0$ 处取极小值，故应选（B）.

（5）已知 $\boldsymbol{A}$ 是行列式值为-3 的 3 阶矩阵，$\boldsymbol{A}^*$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的伴随矩阵，$\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的转置矩阵，如果 $k\boldsymbol{A}$ 的逆矩阵是 $\boldsymbol{A}^*-\left|\frac{1}{2}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right|\boldsymbol{A}^{-1}$，则 $k=$

（A）$-\frac{2}{3}$.　　（B）$-\frac{8}{21}$.　　（C）$-\frac{8}{27}$.　　（D）$-\frac{2}{9}$.

【答案】B.

【解析】 因为 $|\boldsymbol{A}|=-3$，$\left|\frac{1}{2}\boldsymbol{A}^T\right|=\left(\frac{1}{2}\right)^3\left|\boldsymbol{A}^T\right|=-\frac{3}{8}$，又 $\boldsymbol{A}\boldsymbol{A}^*=|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}=-3\boldsymbol{E}$

那么由 $k\boldsymbol{A}\left(\boldsymbol{A}^*-\left|\frac{1}{2}\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right|\boldsymbol{A}^{-1}\right)=\boldsymbol{E}$，有 $k\left(|\boldsymbol{A}|\boldsymbol{E}+\frac{3}{8}\boldsymbol{E}\right)=\boldsymbol{E}$，

即 $k\left(-\frac{21}{8}\boldsymbol{E}\right)=\boldsymbol{E}$，所以 $k=-\frac{8}{21}$，故应选（B）.

（6）已知矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ 可逆，$\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} a_{31} & a_{32}+3a_{33} & a_{33} \\ a_{21} & a_{22}+3a_{23} & a_{23} \\ a_{11} & a_{12}+3a_{13} & a_{13} \end{pmatrix}$，且

$\boldsymbol{P}_1=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\boldsymbol{P}_2=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 1 \end{pmatrix},\boldsymbol{P}_3=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix},\boldsymbol{P}_4=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$，则 $\boldsymbol{B}^{-1}=$

（A）$\boldsymbol{P}_4\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}_2$.　　（B）$\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}_4$.

（C） $\boldsymbol{P}_3\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}_4$.　　（D） $\boldsymbol{P}_4\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}_1$.

【答案】B

【解析】由题意

$$\boldsymbol{B}=\boldsymbol{P}_4\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_3=\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&3&1\end{pmatrix},$$

$$\boldsymbol{B}^{-1}=(\boldsymbol{P}_4\boldsymbol{A}\boldsymbol{P}_3)^{-1}=\boldsymbol{P}_3^{-1}\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}_4^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&3&1\end{pmatrix}^{-1}\boldsymbol{A}\begin{pmatrix}0&0&1\\0&1&0\\1&0&0\end{pmatrix}^{-1}=\boldsymbol{P}_2\boldsymbol{A}^{-1}\boldsymbol{P}_4.$$ 故应选（B）.

（7）进行一系列独立重复试验，假设每次试验的成功率都是 $p\ (0<p<1)$，则在试验成功 3 次前至少失败 2 次的概率 $\alpha=$

（A） $1-p^3-(1-p)p^3$.　　（B） $1-p^3-2(1-p)p^3$.

（C） $1-p^3-3(1-p)p^3$.　　（D） $1-p^3-4(1-p)p^3$.

【答案】C

【解析】设 X 表示试验成功 3 次之前已经失败的次数，则 X 的取值为 $0,1,2,\cdots$.

$$P\{X=0\}=P\{\text{试验3次均成功}\}=p^3,$$

$$\begin{aligned}P\{X=1\}&=P\{\text{试验4次且前3次中有1次失败，第4次成功}\}\\&=\mathrm{C}_3^1p^2(1-p)\cdot p=3p^3(1-p),\end{aligned}$$

$$\alpha=P\{X\ge 2\}=1-P\{X=0\}-P\{X=1\}=1-p^3-3p^3(1-p).$$

故应选（C）.

（8）已知随机变量 X 在 $[-1,1]$ 上服从均匀分布，$Y=X^2$，则 X 与 Y

（A）相关且不独立.　　（B）不相关且独立.

（C）不相关且不独立.　　（D）相关且相互独立.

【答案】C

【解析】依题意，$E(X)=0,\ E(XY)=E(X^3)=\int_{-1}^{1}x^3\times\frac{1}{2}dx=0$，于是

$Cov(X,Y)=E(XY)-E(X)E(Y)=0$，从而 $\rho(X,Y)=0$，即 X 与 Y 不相关.

又 $P\{X\le\frac{1}{2},Y\le\frac{1}{4}\}=P\{X\le\frac{1}{2},-\frac{1}{2}\le X\le\frac{1}{2}\}=P\{-\frac{1}{2}\le X\le\frac{1}{2}\}=\frac{1}{2}$，

$P\{X\le\frac{1}{2}\}=\frac{3}{4},\quad P\{Y\le\frac{1}{4}\}=P\{-\frac{1}{2}\le X\le\frac{1}{2}\}=\frac{1}{2},$

故 $P\{X\le\frac{1}{2},Y\le\frac{1}{4}\}\ne P\{X\le\frac{1}{2}\}P\{Y\le\frac{1}{4}\}$.所以 X 与 Y 不独立. 应选（C）.

二、填空题：9-14 小题，每小题 4 分，共 24 分. 请将答案写在答题纸指定位置上.

（9）设函数 f,g 均可微，$z=f\left(xy,\ln x+g(xy)\right)$，则 $x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}=$_____.

【答案】 f_2'.

【解析】 由 $\frac{\partial z}{\partial x}=yf_1'+f_2'(\frac{1}{x}+yg'),\frac{\partial z}{\partial y}=xf_1'+f_2'\cdot xg'$，所以，$x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}=f_2'$.

（10）已知某二阶常系数线性非齐次微分方程的通解为 $y=C_1e^x+C_2e^{-x}-\frac{1}{2}+\frac{1}{10}\cos 2x$，则此微分方程为_____.

【答案】 $y''-y=\sin^2 x$.

【解析】 由题设，对应齐次线性方程的通解为 $\bar{y}=C_1e^x+C_2e^{-x}$，特征方程为 $(\lambda-1)(\lambda+1)=0$，即 $\lambda^2-1=0$. 可见，对应齐次方程为 $y''-y=0$.

设待求微分方程为 $y''-y=f(x)$，则将特解 $y^*=-\frac{1}{2}+\frac{1}{10}\cos 2x$ 代入，得

$$f(x)=(-\frac{1}{2}+\frac{1}{10}\cos 2x)''-(-\frac{1}{2}+\frac{1}{10}\cos 2x)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cos 2x=\sin^2 x,$$

即所求方程为 $y''-y=\sin^2 x$.

（11）不定积分 $I=\int e^{2\arctan x}\frac{(1+x)^2}{1+x^2}dx=$_____.

【答案】 $xe^{2\arctan x}+C$.

【解析】 令 $t=\arctan x$，则 $dt=\frac{1}{1+x^2}dx$. 于是

$$\begin{aligned}I&=\int e^{2t}(1+\tan t)^2dt=\int e^{2t}(\sec^2 t+2\tan t)dt=\int e^{2t}\sec^2 tdt+2\int e^{2t}\tan tdt\\&=\int e^{2t}d(\tan t)+\int\tan td(e^{2t})=e^{2t}\tan t-\int\tan td(e^{2t})+\int\tan td(e^{2t})\\&=e^{2t}\tan t+C=xe^{2\arctan x}+C.\end{aligned}$$

（12）设生产函数为 $Q=AL^{\alpha}K^{\beta}$，其中 Q 是产出量，L 是劳动投入量，K 是资本投入量，而

A,α,β 均为大于零的参数，则当 $Q=1$ 时 K 关于 L 的弹性为_____.

【答案】 $-\dfrac{\alpha}{\beta}$.

【解析】 当 $Q=1$ 时，$1=AL^{\alpha}K^{\beta}$，等式两边对 L 求导得

$$0=\alpha AL^{\alpha-1}K^{\beta}+\beta AL^{\alpha}K^{\beta-1}\frac{dK}{dL} \qquad \Rightarrow \frac{dK}{dL}=-\frac{\alpha k}{\beta L}.$$

由弹性计算公式知，当 $Q=1$ 时 K 关于 L 的弹性为

$$\frac{dK}{dL}\cdot\frac{L}{K}=-\frac{\alpha K}{\beta L}\cdot\frac{L}{K}=-\frac{\alpha}{\beta}.$$

（13）设 $\boldsymbol{\alpha}=(1,0,k)^{\mathrm{T}}$，矩阵 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}$，$n$ 为正整数，若 $a\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^2\sim\begin{pmatrix}a-4 & & \\ & a & \\ & & a\end{pmatrix}$，则 $k=$_____.

【答案】 ±1.

【解析】 $0\le \mathrm{r}(\boldsymbol{A})=\mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})\le\min\{\mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}),\mathrm{r}(\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}})\}$，因为 $\boldsymbol{\alpha}\ne\boldsymbol{0}$，所以 $\mathrm{r}(\boldsymbol{A})=1$.

设矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的非零特征值 λ，$a\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^2$ 的特征值为 $\lambda_1=a-\lambda,\lambda_2=\lambda_3=a$.

因为 $a\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}^2\sim\begin{pmatrix}a-4 & & \\ & a & \\ & & a\end{pmatrix}$，

所以 $\lambda_1+\lambda_2+\lambda_3=3a-\lambda=3a-4$，得 $\lambda=4$.

由特征值的性质

$$\lambda=\boldsymbol{\alpha}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{\alpha}=1+k^2,$$

所以 $k=\pm1$.

（14）设随机变量 X 的密度函数为 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2+2x-1},-\infty<x<+\infty$，则 $EX=$_____，$DX=$_____.

【答案】 1，$\dfrac{1}{2}$.

【解析】由于 $f(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2+2x-1}=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\times\frac{1}{\sqrt{2}}}e^{-\frac{(x-1)^2}{2\times(1/2)}}$，即 X： $N(1,\frac{1}{2})$.

故 $EX=1,\ DX=\frac{1}{2}$.

三、解答题：15—23 小题，共 94 分.请将解答写在答题纸指定的位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（15）**（本题满分 10 分）**

设 $a_1=2$， $a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{1}{a_n}\right)$， $n=1,2,\cdots$ ，

证明：（Ⅰ） $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在.

（Ⅱ）级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)$ 收敛.

【证明】（Ⅰ） 显然 $a_n>0(n=1,2,\cdots)$，由初等不等式：$\forall$ 非负数 x,y 必有 $x+y\ge 2\sqrt{xy}$，易知

$$a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{1}{a_n}\right)\ge\frac{1}{2}\cdot 2=1\ \ (n=1,2,\cdots).$$

又 $\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{a_n^2}\right)\le\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{1}\right)=1$，因此，$\{a_n\}$ 单调下降且有界，存在极限 $\lim\limits_{n\to\infty}a_n$.

（Ⅱ） 由 $\{a_n\}$ 单调下降 $\Rightarrow$ $\frac{a_n}{a_{n+1}}-1=\frac{a_n-a_{n+1}}{a_{n+1}}\ge 0.$ $\Rightarrow$ 原级数是正项级数.

现适当放大，注意 $a_n\ge 1$，得 $0\le\frac{a_n-a_{n+1}}{a_{n+1}}\le a_n-a_{n+1}$. 而 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n+1})$ 的部分和

$S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k-a_{k+1})=a_1-a_{n+1},\Rightarrow\lim\limits_{n\to+\infty}S_n=a_1-\lim\limits_{n\to+\infty}a_{n+1}\ \exists\Rightarrow\sum\limits_{n=1}^{\infty}(a_n-a_{n+1})$ 收敛. 由比较判别法知 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{a_n-a_{n+1}}{a_{n+1}}$ 收敛.

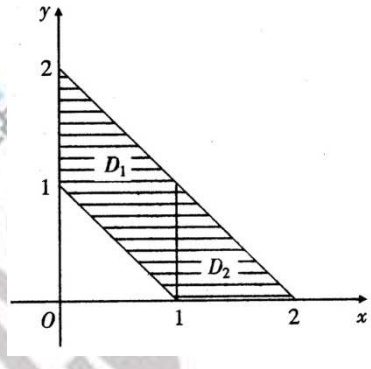
（16）**（本题满分 9 分）**

计算累次积分 $I=\int_0^1 dx\int_{1-x}^{2-x}e^{(x+y)^2}dy+\int_1^2 dx\int_0^{2-x}e^{(x+y)^2}dy$.

【解析】设 $\int_0^1 dx\int_{1-x}^{2-x} e^{(x+y)^2}dy=\iint\limits_{D_1} e^{(x+y)^2}d\sigma$，$\int_1^2 dx\int_0^{2-x} e^{(x+y)^2}dy=\iint\limits_{D_2} e^{(x+y)^2}d\sigma$，则积分区域分别是 $D_1=\{(x,y)|0\le x\le 1,1-x\le y\le 2-x\}$, $D_2=\{(x,y)|1\le x\le 2,0\le y\le 2-x\}$.

记区域 $D=D_1+D_2$，不难得出 D 是由直线 $y=1-x,y=2-x$ 与 x 轴和 y 轴在第一象限围成的平面区域（如图所示），且

$$\iint\limits_{D} e^{(x+y)^2}d\sigma=\iint\limits_{D_1} e^{(x+y)^2}d\sigma+\iint\limits_{D_2} e^{(x+y)^2}d\sigma .$$



令 $x=r\cos\theta,y=r\sin\theta$ 引入极坐标系，在极坐标系 (r,θ) 中区域 D 可表示为

$$D=\left\{(r,\theta)\middle|0\le\theta\le\frac{\pi}{2},\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}\le r\le\frac{2}{\cos\theta+\sin\theta}\right\},$$

于是所求累次积分

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}}^{\frac{2}{\cos\theta+\sin\theta}} e^{r^2(\cos\theta+\sin\theta)^2}rdr .$$

在内层积分中令 $t=r(\cos\theta+\sin\theta)$，则 $dt=(\cos\theta+\sin\theta)dr, r:\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}\to\frac{2}{\cos\theta+\sin\theta}\Leftrightarrow t:1\to 2$，从而

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\theta\int_{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}}^{\frac{2}{\cos\theta+\sin\theta}} e^{r^2(\cos\theta+\sin\theta)^2}rdr=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{(\cos\theta+\sin\theta)^2}\int_1^2 te^{t^2}dt$$

$$=\frac{e^4-e}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\theta}{(\cos\theta+\sin\theta)^2}=\frac{e^4-e}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\tan\theta}{(1+\tan\theta)^2}$$

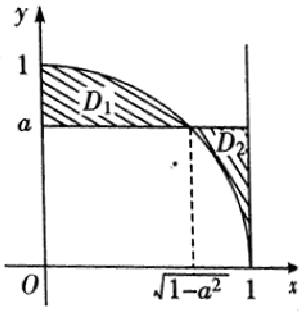
$$=\frac{e(e^3-1)}{2}\int_0^{+\infty}\frac{du}{(1+u)^2}=-\frac{e(e^3-1)}{2(1+u)}\Bigg|_0^{+\infty}=\frac{e(e^3-1)}{2} .$$

（17）**（本题满分 9 分）**

求由曲线 $y=\sqrt{1-x^2}$ 与直线 $y=a(0<a<1)$ 以及 $x=0,x=1$ 围成的平面图形（如图的阴影部分）绕 x 轴旋转一周所成的旋转体的体积 $V(a)$.

【解析】把由曲线 $y=\sqrt{1-x^2}$ 与直线 $y=a(0<a<1)$ 以及 $x=0,x=1$ 围成的平面图形记为 D，则 D 可分为两个部分区域

$$D_1=\left\{(x,y)\middle|0\le x\le\sqrt{1-a^2},a\le y\le\sqrt{1-x^2}\right\}$$



与 $D_2=\left\{(x,y)\middle|\sqrt{1-a^2}\le x\le 1,\sqrt{1-x^2}\le y\le a\right\}$.

其中，D_1 绕 x 轴旋转一周所成的旋转体的体积为

$$\begin{aligned}V_1(a)&=\pi\int_0^{\sqrt{1-a^2}}\left(1-x^2-a^2\right)dx\\&=\pi\int_0^{\sqrt{1-a^2}}\left[\left(1-a^2\right)-x^2\right]dx\\&=\pi\left[\left(1-a^2\right)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{3}\left(1-a^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]=\frac{2}{3}\pi\left(1-a^2\right)^{\frac{3}{2}},\end{aligned}$$

D_2 绕 x 轴旋转一周所成的旋转体的体积为

$$\begin{aligned}V_2(a)&=\pi\int_{\sqrt{1-a^2}}^{1}\left[a^2-\left(1-x^2\right)\right]dx\\&=\pi\left\{\left(a^2-1\right)\left(1-\sqrt{1-a^2}\right)+\frac{1}{3}\left[1-\left(1-a^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]\right\}\\&=\pi\left[a^2-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\left(1-a^2\right)^{\frac{3}{2}}\right],\end{aligned}$$

故所求旋转体的体积

$$\begin{aligned}V(a)&=V_1(a)+V_2(a)=\frac{2}{3}\pi\left(1-a^2\right)^{\frac{3}{2}}+\pi\left[a^2-\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\left(1-a^2\right)^{\frac{3}{2}}\right]\\&=\pi\left[a^2-\frac{2}{3}+\frac{4}{3}\left(1-a^2\right)^{\frac{3}{2}}\right].\end{aligned}$$

（18）**（本题满分 11 分）**

求二元函数 $z=f(x,y)=x^2y(4-x-y)$ 在直线 $x+y=6$，x 轴与 y 轴围成的闭区域 D 上的最大值与最小值.

【解析】 先求在 D 内的驻点

$$\begin{cases}f_x'(x,y)=2xy(4-x-y)-x^2y=0,\\f_y'(x,y)=x^2(4-x-y)-x^2y=0.\end{cases}$$

得 $\begin{cases}x=0,\\0\le y\le 6,\end{cases}$ $\begin{cases}x=4,\\y=0,\end{cases}$ $\begin{cases}x=2,\\y=1.\end{cases}$

因此在 D 内只有驻点 $\begin{cases}x=2,\\y=1.\end{cases}$ 相应的函数值为 $f(2,1)=4$.

再求 $f(x,y)$ 在 D 边界上的最值

（ⅰ）在 x 轴上 $y=0$，所以 $f(x,0)=0$.

（ⅱ）在 y 轴上 $x=0$，所以 $f(0,y)=0$.

（ⅲ）在 $x+y=6$ 上将 $y=6-x$ 代入 $f(x,y)$ 中，得 $f(x,y)=2x^2(x-6)$，

$f_x'=6x^2-24x=0$.

得 $x=0$（舍），$x=4$，$y=6-x=2$.

于是得驻点 $\begin{cases} x=4, \\ y=2. \end{cases}$

函数值 $f(4,2)=x^2y(4-x-y)\big|_{(4,2)}=-64$.

综上所述，知最大值为 $f(2,1)=4$，最小值为 $f(4,2)=-64$.

（19）**（本题满分 11 分）**

设 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$，且 $f''(x)>0$，证明：$f(x)>x(x\neq 0)$.

【证明】 因为 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$，所以 $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$，所以 $f(0)=0$（因为 $f''(x)$ 存在，$f(x)$ 一定连续）. 且 $f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)-f(0)}{x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{f(x)}{x}=1$，$f(x)$ 在 $x=0$ 展成一阶麦克劳林公式

$$f(x)=f(0)+f'(0)x+\frac{x^2}{2!}f''(\xi).$$

因为 $f''(x)>0$，所以 $f''(\xi)>0$，所以 $f(x)>f(0)+f'(0)x=x$.

（20）**（本题满分 11 分）**

线性方程组 $\begin{cases} x_1-5x_2+2x_3-3x_4=11, \\ 5x_1+3x_2+cx_3-x_4=-1, \\ 2x_1+4x_2+2x_3+x_4=-6 \end{cases}$ 系数矩阵的秩为 2，求 c 及方程组的通解.

【解析】 增广矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & -3 & 11 \\ 5 & 3 & c & -1 & -1 \\ 2 & 4 & 2 & 1 & -6 \end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix} 1 & -5 & 2 & -3 & 11 \\ 0 & 28 & -10+c & 14 & -56 \\ 0 & 0 & 3-\dfrac{c}{2} & 0 & 0 \end{pmatrix}$，

由系数矩阵的秩为 2，所以 $3-\frac{c}{2}=0$，得 $c=6$，

所以 $\boldsymbol{B}\sim\begin{pmatrix}1&-5&2&-3&11\\0&28&-4&14&-56\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}\sim\begin{pmatrix}1&9&0&4&-17\\0&-7&1&-\frac{7}{2}&14\\0&0&0&0&0\end{pmatrix}$

得同解方程组

$$\begin{cases}x_1+9x_2+4x_4=-17,\\-7x_2+x_3-\frac{7}{2}x_4=14\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x_1=-9x_2-4x_4-17,\\x_3=7x_2+\frac{7}{2}x_4+14,\end{cases}$$

令 $x_2=x_4=0$ 得特解 $\boldsymbol{\eta}=\begin{pmatrix}-17\\0\\14\\0\end{pmatrix}$，分别令 $\begin{pmatrix}x_2\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ 和 $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$，得对应齐次方程的基础解系

$$\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}-9\\1\\7\\0\end{pmatrix},\quad \boldsymbol{\xi}_2=\begin{pmatrix}-4\\0\\\frac{7}{2}\\1\end{pmatrix}.$$

原方程组的通解为 $\boldsymbol{x}=k_1\boldsymbol{\xi}_1+k_2\boldsymbol{\xi}_2+\boldsymbol{\eta}=k_1\begin{pmatrix}-9\\1\\7\\0\end{pmatrix}+k_2\begin{pmatrix}-4\\0\\\frac{7}{2}\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-17\\0\\14\\0\end{pmatrix}$，$k_1,k_2$ 为任意实数.

（21）**（本题满分 11 分）**

已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2+3x_2^2+3x_3^2+2ax_2x_3$（$a>0$），若二次型 f 的规范形为 $y_1^2+2y_2^2+5y_3^2$，求 a 的值及所使用的正交变换矩阵.

【解析】二次型 f 的矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&a\\0&a&3\end{pmatrix}$，特征方程为

$$|\lambda\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A}|=\begin{vmatrix}\lambda-2&0&0\\0&\lambda-3&-a\\0&-a&\lambda-3\end{vmatrix}=(\lambda-2)(\lambda^2-6\lambda+9-a^2)=0,$$

$\boldsymbol{A}$ 的特征值为 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=5.$

将 $\lambda=1$（或 $\lambda=5$）代入特征方程，得

$$a^2-4=0,a=\pm 2.$$

因为 $a>0$，所以 $a=2$，这时 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&3&2\\0&2&3\end{pmatrix}$.

解 $(\lambda_i\boldsymbol{E}-\boldsymbol{A})\boldsymbol{x}=\boldsymbol{0}$，得对应 $\lambda_i(i=1,2,3)$ 的特征向量分别为

$$\boldsymbol{\alpha}_1=(0,1,-1)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_2=(1,0,0)^{\mathrm{T}},\boldsymbol{\alpha}_3=(0,1,1)^{\mathrm{T}}.$$

由于 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 为实对称矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的不同特征值对应的特征向量必正交，将 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 单位化，得

$$\boldsymbol{\beta}_1=\frac{\boldsymbol{\alpha}_1}{|\boldsymbol{\alpha}_1|}=\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\beta}_2=\frac{\boldsymbol{\alpha}_2}{|\boldsymbol{\alpha}_2|}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\ \boldsymbol{\beta}_2=\frac{\boldsymbol{\alpha}_3}{|\boldsymbol{\alpha}_3|}=\begin{pmatrix}0\\\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}.$$

故所用正交变换矩阵为

$$\boldsymbol{Q}=[\boldsymbol{\beta}_1,\ \boldsymbol{\beta}_2,\ \boldsymbol{\beta}_2]=\begin{pmatrix}0&1&0\\\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\\-\frac{1}{\sqrt{2}}&0&\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}.$$

（22）（**本题满分 11 分**）

设二维离散型随机变量 (X,Y) 的取值为 $(x_i,y_j)\ (i,j=1,2)$，且

$P\{X=x_2\}=\frac{3}{4},P\{Y=y_1|X=x_2\}=\frac{2}{3},P\{X=x_1|Y=y_1\}=\frac{1}{4}$，试求：

（Ⅰ）二维随机变量 (X,Y) 的联合概率分布；

（Ⅱ）X 与 Y 的相关系数 ρ_{XY}；

（Ⅲ）条件概率 $P\{Y=y_j|X=x_1\},j=1,2.$

【解析】（Ⅰ）依题意，随机变量 X 与 Y 的可能取值分别为 x_1,x_2 与 y_1,y_2，且

$$P\{X=x_1\}=1-P\{X=x_2\}=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4},$$

又题设 $P\{X=x_1|Y=y_1\}=\frac{1}{4}$,

于是有 $P\{X=x_1|Y=y_1\}=P\{X=x_1\}$,

即事件 $\{X=x_1\}$ 与事件 $\{Y=y_1\}$ 相互独立，因而 $\{X=x_1\}$ 的对立事件 $\{X=x_2\}$ 与 $\{Y=y_1\}$ 独立，且 $\{X=x_1\}$ 与 $\{Y=y_1\}$ 的对立事件 $\{Y=y_2\}$ 独立；$\{X=x_2\}$ 与 $\{Y=y_2\}$ 独立，即 X 与 Y 相互独立.所以有

$$P\{Y=y_1\}=P\{Y=y_1|X=x_2\}=\frac{2}{3},$$

$$P\{Y=y_2\}=1-P\{Y=y_1\}=\frac{1}{3};$$

$$P\{X=x_1,Y=y_1\}=P\{X=x_1\}P\{Y=y_1\}=\frac{1}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{6},$$

$$P\{X=x_1,Y=y_2\}=P\{X=x_1\}P\{Y=y_2\}=\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{12},$$

$$P\{X=x_2,Y=y_1\}=P\{X=x_2\}P\{Y=y_1\}=\frac{3}{4}\times\frac{2}{3}=\frac{1}{2},$$

$$P\{X=x_2,Y=y_2\}=P\{X=x_2\}P\{Y=y_2\}=\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{4}.$$

于是 (X,Y) 的联合概率分布为

$X \backslash Y$	y_1	y_2	$P\{X=x_i\}$
x_1	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{4}$
x_2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$
$P\{Y=y_j\}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	1

（Ⅱ）由（Ⅰ）知 X 与 Y 独立，因此它们的相关系数 $\rho_{XY}=0$.

（Ⅲ）因 X 与 Y 独立，所以 $P\{Y=y_j|X=x_1\}=P\{Y=y_j\}, j=1,2,$ 于是有

$$P\{Y=y_1|X=x_1\}=P\{Y=y_1\}=\frac{2}{3},$$
$$P\{Y=y_2|X=x_1\}=P\{Y=y_2\}=\frac{1}{3}.$$

（23）**（本题满分 11 分）**

设总体 X 的概率密度函数为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\sqrt{\theta}x^{\sqrt{\theta}-1}, & 0<x<1,\\ 0, & \text{其他},\end{cases}$$

其中 $\theta>0$ 为未知参数.又 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为取自总体 X 的样本观察值，求未知参数 θ 的矩估计值 $\hat{\theta}_1$ 与最大似然估计值 $\hat{\theta}_2$.

【解析】（Ⅰ）$EX=\int_{-\infty}^{+\infty}xf(x;\theta)dx=\int_0^1 x\sqrt{\theta}x^{\sqrt{\theta}-1}dx=\int_0^1\sqrt{\theta}x^{\sqrt{\theta}}dx=\frac{\sqrt{\theta}}{\sqrt{\theta}+1}=\mu,$

解得 $\theta=\left(\frac{\mu}{1-\mu}\right)^2$，于是 θ 的矩估计值为 $\hat{\theta}_1=\left(\frac{\bar{x}}{1-\bar{x}}\right)^2$.

（Ⅱ）似然函数为

$$L(x_1,x_2,\cdots,x_n;\theta)=(\sqrt{\theta})^n\prod_{i=1}^n x_i^{\sqrt{\theta}-1}=L(\theta),$$
$$\ln L(\theta)=\frac{n}{2}\ln\theta+(\sqrt{\theta}-1)\sum_{i=1}^n\ln x_i,$$

令 $\frac{d\ln L(\theta)}{d\theta}=\frac{n}{2\theta}+\frac{1}{2\sqrt{\theta}}\sum_{i=1}^n\ln x_i=0,$

解得 $\theta=\left(n\Big/\sum_{i=1}^n\ln x_i\right)^2$.

于是 θ 的最大似然估计值为 $\hat{\theta}_2=\left(n\Big/\sum_{i=1}^n\ln x_i\right)^2=\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n\ln x_i\right)^{-2}$.