2017年全国高中数学联合竞赛湖北省预赛试题参考答案和评分标准

（高一年级）

说明：

1. 评阅试卷时，请依据本评分标准．填空题只设**9**分和**0**分两档；其他各题的评阅，请严格按照本评分标准的评分档次给分，不要增加其他中间档次．

2. 如果考生的解答方法和本解答不同，只要思路合理、步骤正确，在评卷时可参考本评分标准适当划分档次评分，解答题中5分为一个档次，不要增加其他中间档次．

一、填空题（本大题共10小题，每小题9分，共90分．）

1． 已知非空集合 $A=\{x\,|\,m+1\le x\le 2m-1\}$，$B=\{x\,|\,x^2-2x-15\le 0\}$，且 $A\subseteq B$，则实数 m 的取值范围是__$[2,3]$__．

2． 已知正项等比数列 $\{a_n\}$ 满足 $a_6+a_5+a_4-a_3-a_2-a_1=49$，则 $a_9+a_8+a_7$ 的最小值为__196__．

3. 设函数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$（$x\in\mathbf{R}$），其中 a,b,c 为互不相同的非零整数，且 $f(a)=a^3$，$f(b)=b^3$，则 $a+b+c=$__18__．

4． 设△ABC 的内角 A,B,C 的对边分别是 a,b,c，若 $\dfrac{\cos A}{a}=\dfrac{3\cos B}{b}=\dfrac{4\cos C}{c}$，则 $\tan A=$__$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$__．

5． 设函数 $f(x)=(\frac{1}{2})^x+(\frac{2}{3})^x+(\frac{5}{6})^x$，$x\in[0,+\infty)$，则该函数图象上整点的个数为__3__．

6． 已知 O 为△ABC 的外心，D 为 BC 的中点，若 $\overrightarrow{AO}\cdot\overrightarrow{AD}=4$，$BC=2\sqrt{6}$，则 $AD=$__$\sqrt{2}$__．

7． 已知正实数 a,b 满足 $ab(a+b)=4$，则 $2a+b$ 的最小值为__$2\sqrt{3}$__．

8． 设 $x,y\in\mathbf{R}$，则 $P=(x+1-\cos y)^2+(x-1+\sin y)^2$ 的最小值为__$3-2\sqrt{2}$__．

9． 若关于 x 的方程 $\dfrac{|x|}{x+1}=kx^2$ 恰有两个不同的实数根，则实数 k 的取值范围为__$(-\infty,0)\cup(0,4)$__．

10． 将与70互素的所有正整数从小到大排成数列，这个数列的第2017项为__5881__．

二、解答题（本题满分60分，每小题20分。）

11． 求实数 a 的取值范围，使不等式

$$\sin 2\theta-2\sqrt{2}a\cos(\theta-\frac{\pi}{4})-\frac{\sqrt{2}a}{\sin(\theta+\frac{\pi}{4})}>-3-a^2$$

对 $\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]$ 恒成立．

解 设 $x=\sin\theta+\cos\theta,\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]$，则 $x\in[1,\sqrt{2}]$，$\sin 2\theta=x^2-1$，

$\sin(\theta+\frac{\pi}{4})=\cos(\theta-\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}x$， ……………………………………5分

故原不等式可化为 $x^2-2ax-\frac{2a}{x}+2+a^2>0$，即

$(a-x)[a-(x+\frac{2}{x})]>0$ ①…………………………10 分

记 $f(x)=x+\frac{2}{x}$，可知 $f(x)$ 在 $[1,\sqrt{2}]$ 上单调递减，故 $[f(x)]_{\max}=f(1)=3$.

若 $1\le a\le 3$，则当 $x=1$ 时，不等式①不成立，不符合题设条件. …………………………15 分

若 $a<1$ 或 $a>3$，则对一切 $x\in[1,\sqrt{2}]$，$a-x$ 与 $a-(x+\frac{2}{x})$ 同号，可知不等式①恒成立，符合题意.

因此，所求实数 a 的取值范围是 $(-\infty,1)\cup(3,+\infty)$. ……………………………………………20 分

12. 已知函数 $f(x)=x^2+(a-2)x+a$，$g(x)=|x-a|$，其中 $a>0$.

（1）设 $h(x)=f(x)-g(x)$，判断函数 $h(x)$ 的单调性;

（2）如果函数 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 的图象恰有三个交点，求 a 的取值范围.

解 （1）$h(x)=f(x)-g(x)=x^2+(a-2)x+a-|x-a|=\begin{cases}x^2+(a-3)x+2a, x\ge a,\\ x^2+(a-1)x, x<a.\end{cases}$

函数 $y=h(x)$ 的图象为抛物线 $y=x^2+(a-3)x+2a$ 在 $x=a$ 右侧的部分和抛物线 $y=x^2+(a-1)x$ 在 $x=a$ 左侧的部分构成，两个分支的函数图象在 $x=a$ 处是连续的.

两条抛物线的对称轴分别为 $x_1=\frac{3-a}{2}$ 和 $x_2=\frac{1-a}{2}$，又 $a>0$，故 $\frac{1-a}{2}<\frac{3-a}{2}$.

……………………………………………5 分

①若 $a\le\frac{1-a}{2}$，即 $0<a\le\frac{1}{3}$ 时，则 $h(x)$ 在 $(-\infty,\frac{3-a}{2})$ 上递减，在 $(\frac{3-a}{2},+\infty)$ 上递增;

②若 $\frac{1-a}{2}<a<\frac{3-a}{2}$，即 $\frac{1}{3}<a<1$ 时，则 $h(x)$ 在 $(-\infty,\frac{1-a}{2})$ 上递减，在 $(\frac{1-a}{2},a)$ 上递增，在 $(a,\frac{3-a}{2})$ 上递减，在 $(\frac{3-a}{2},+\infty)$ 上递增.

③若 $a\ge\frac{3-a}{2}$，即 $a\ge 1$ 时，$h(x)$ 在 $(-\infty,\frac{1-a}{2})$ 上递减，在 $(\frac{1-a}{2},+\infty)$ 上递增.

……………………………………………10 分

（2）如果函数 $y=f(x)$ 和 $y=g(x)$ 的图象恰有三个交点，则函数 $h(x)$ 恰有三个零点. 结合（1）的结论可知应该有：$\frac{1}{3}<a<1$ 且 $h(\frac{1-a}{2})<0$，$h(a)=0$，$h(\frac{3-a}{2})<0$.

……………………………………………15 分

由 $h(a)=0$ 得 $a^2+(a-3)a+2a=0$，解得 $a=\frac{1}{2}$（$a=0$ 舍去），此时

$h(\frac{1-a}{2})=h(\frac{1}{4})=(\frac{1}{4})^2+\ (\frac{1}{2}-1)\cdot\frac{1}{4}=-\frac{1}{16}<0$，

$h(\frac{3-a}{2})=h(\frac{5}{4})=(\frac{5}{4})^2+(\frac{1}{2}-3)\cdot\frac{5}{4}+2\cdot\frac{1}{2}=-\frac{9}{16}<0$，

符合要求.

因此，$a=\frac{1}{2}$. ……………………………………………20 分

13. 记数列$\{a_n\}$的前n项和为S_n（$n\in\mathbf{N}^*$），其中

$$a_n=\begin{cases}n\cdot 2^{n-1}, & n\text{为偶数},\\(n+\lambda)\cdot 2^{n-1}, & n\text{为奇数}.\end{cases}$$

（1）求S_n；（2）若$\lambda\in(-2017,-2016)$，求S_n取得最小值时对应的n的值.

解 （1）$a_n=n\cdot 2^{n-1}+\dfrac{\lambda}{2}[2^{n-1}-(-2)^{n-1}]$.

记$T_n=1\cdot 2^0+2\cdot 2^1+\cdots+n\cdot 2^{n-1}$，则$2T_n=1\cdot 2^1+2\cdot 2^2+\cdots+(n-1)\cdot 2^{n-1}+n\cdot 2^n$，

$\therefore T_n=n\cdot 2^n-(1+2+2^2+\cdots+2^{n-1})=(n-1)\cdot 2^n+1$. ……………………………………5 分

又$1+2+2^2+\cdots+2^{n-1}=2^n-1$，

$1+(-2)+(-2)^2+\cdots+(-2)^{n-1}=\dfrac{1-(-2)^n}{1-(-2)}=\dfrac{1}{3}[1-(-2)^n]$，

故$S_n=T_n+\dfrac{\lambda}{2}\cdot(2^n-1)+\dfrac{\lambda}{2}\cdot\dfrac{1}{3}[1-(-2)^n]=(n-1)\cdot 2^n+1+\dfrac{\lambda}{6}[3\cdot 2^n-(-2)^n-2]$.

……………………………………10 分

（2）注意到$a_{2n}>0$，故S_n取得最小值时必有n为奇数.

而$S_{2k+1}-S_{2k-1}$

$=2k\cdot 2^{2k+1}-(2k-2)\cdot 2^{2k-1}+\dfrac{\lambda}{6}\cdot[3\cdot(2^{2k+1}-2^{2k-1})-(-2)^{2k+1}+(-2)^{2k-1}]$

$=(3k+1+\lambda)\cdot 2^{2k}$.

令$S_{2k+1}-S_{2k-1}>0$，即$(3k+1+\lambda)\times 2^{2k}>0$，得$k>-\dfrac{1+\lambda}{3}$. …………………………15 分

又由$\lambda\in(-2017,-2016)$知$-\dfrac{1+\lambda}{3}\in(\dfrac{2015}{3},672)$，所以$k\geq 672$；

同理，令$S_{2k+1}-S_{2k-1}<0$，即$(3k+1+\lambda)\times 2^{2k}<0$，得$k<-\dfrac{1+\lambda}{3}$，所以$k\leq 671$.

因此，当S_n取得最小值时，$n=2\times 671+1=1343$. ……………………………………20 分